

La teoria dei mondi possibili di Saul Kripke

Parte I

1.1 Il Problema della Modalità nella Filosofia Analitica Classica

La questione della modalità, intesa come la distinzione tra ciò che è necessario, possibile o contingente, ha attraversato l'intera storia della filosofia occidentale, dalle speculazioni aristoteliche sulla potenza e l'atto fino alle elaborate costruzioni leibniziane dei mondi possibili compostibili. Tuttavia, nel contesto della filosofia analitica del ventesimo secolo, la modalità si presentava come un territorio filosoficamente insidioso, carico di difficoltà semantiche apparentemente insormontabili. La tradizione fregeana e russelliana, con la sua enfasi sulla chiarezza logica e l'analisi del linguaggio, aveva relegato il discorso modale ai margini della rispettabilità filosofica, considerandolo privo di un'adeguata fondazione semantica rigorosa.

Willard Van Orman Quine, nella sua celebre critica alla logica modale, aveva sollevato obiezioni devastanti contro la legittimità teoretica dei contesti modali. L'argomento quineano si articolava essenzialmente intorno al fenomeno dell'opacità referenziale: nei contesti modali, sosteneva Quine, il principio leibniziano dell'identità degli indiscernibili sembrava venir meno, generando paradossi logici apparentemente irrisolvibili. Se è vero che nove è necessariamente maggiore di sette, e se è vero che nove è identico al numero dei pianeti del sistema solare (assumendo la vecchia classificazione che includeva Plutone), ne dovrebbe seguire, per la legge di sostitutività degli identici, che il numero dei pianeti è necessariamente maggiore di sette. Ma questo è manifestamente falso: il numero dei pianeti è una questione empirica contingente, che avrebbe potuto essere differente. Questo tipo di inferenza fallace dimostrava, secondo Quine, che i contesti modali violavano i principi fondamentali della logica estensionale classica.

La risposta di Rudolf Carnap a queste difficoltà era consistita nell'elaborazione di una semantica basata sulle descrizioni di stato, ma il suo approccio rimaneva gravato da presupposizioni linguistiche che molti filosofi trovavano insoddisfacenti. Carnap aveva tentato di definire la necessità in termini di verità in tutte le descrizioni di stato consistenti con le regole semantiche di un linguaggio artificiale. Una descrizione di stato era concepita come un'assegnazione completa di valori di verità a tutte le proposizioni atomiche di un linguaggio formalizzato. Sebbene questo approccio fornisse una caratterizzazione formalmente precisa della modalità, esso rimaneva confinato all'interno di una concezione puramente linguistica e convenzionalistica della necessità, incapace di catturare l'intuizione metafisica secondo cui alcune verità sarebbero necessarie non in virtù delle convenzioni linguistiche, ma in virtù della natura stessa della realtà.

1.2 L'Innovazione Kripkeana: La Semantica dei Mondi Possibili

L'intervento rivoluzionario di Saul Kripke si colloca in questo contesto problematico. Nei suoi lavori seminali pubblicati tra il 1959 e il 1963, quando era ancora uno studente di liceo e poi di college, Kripke sviluppò una semantica formale per la logica modale che non solo risolveva le difficoltà tecniche che avevano afflitto i tentativi precedenti, ma apriva anche nuove prospettive filosofiche di portata straordinaria. L'idea centrale di Kripke era ingannevolmente semplice nella sua formulazione, ma profondamente rivoluzionaria nelle sue implicazioni: la verità di una proposizione modale doveva essere valutata non rispetto a un singolo mondo o modello, ma rispetto a una molteplicità di mondi possibili strutturalmente connessi tra loro.

Un modello kripkeano, nella sua formulazione canonica, è costituito da una struttura $M = \langle W, R, V \rangle$, dove W rappresenta un insieme non vuoto di mondi possibili, R è una relazione binaria definita su W (la cosiddetta relazione di accessibilità), e V è una funzione di valutazione che assegna valori di verità alle proposizioni atomiche relativamente a ciascun mondo possibile. La brillante intuizione di Kripke consisteva nel riconoscere che le diverse logiche modali, con i loro differenti principi di validità, potevano essere caratterizzate imponendo diverse condizioni strutturali sulla relazione di accessibilità R .

La semantica procede nel modo seguente. Data una formula modale $\Box\phi$ (che si legge: "è necessario che ϕ "), essa è vera in un mondo w se e solo se ϕ è vera in tutti i mondi w' tali che wRw' , cioè in tutti i mondi accessibili da w secondo la relazione R . Analogamente, la formula $\Diamond\phi$ (che si legge: "è possibile che ϕ ") è vera in un mondo w se e solo se esiste almeno un mondo w' accessibile da w in cui ϕ è vera. Formalmente:

$M, w \models \Box\phi$ se e solo se per ogni $w' \in W$ tale che wRw' , si ha $M, w' \models \phi$
 $M, w \models \Diamond\phi$ se e solo se esiste $w' \in W$ tale che wRw' e $M, w' \models \phi$

Questa caratterizzazione semantica possiede un'eleganza formale notevole. La relazione di accessibilità R può essere intesa come una codificazione della nozione intuitiva di "possibilità relativa": dire che un mondo w' è accessibile da un mondo w significa dire che w' rappresenta una possibilità genuina dal punto di vista di w . La variabilità nelle proprietà strutturali di R permette di catturare diverse concezioni della modalità.

1.3 Le Proprietà Strutturali della Relazione di Accessibilità

La potenza espressiva della semantica kripkeana si manifesta pienamente quando si considerano le diverse proprietà che la relazione di accessibilità può possedere, e le loro corrispondenze con principi modali specifici. Questa corrispondenza tra proprietà

strutturali dei frame e validità di formule modali costituisce uno dei risultati più eleganti della logica modale moderna, noto come teoria della corrispondenza.

Se la relazione R è riflessiva, cioè se per ogni mondo w si ha wRw (ogni mondo è accessibile da se stesso), allora risulta valido il principio T: $\Box\phi \rightarrow \phi$. Questo principio, che afferma che ciò che è necessario è anche vero, esprime l'idea che il mondo attuale rappresenta effettivamente una possibilità genuina. La validità di T è intuitivamente desiderabile per la maggior parte delle nozioni di necessità che vogliamo catturare: se qualcosa è necessariamente il caso, allora è effettivamente il caso.

Se R è transitiva, cioè se per ogni w, w', w'' tali che wRw' e $w'Rw''$ si ha anche wRw'' , allora risulta valido il principio 4: $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$. Questo principio, noto come l'assioma dell'introspezione positiva, afferma che se qualcosa è necessario, allora è necessariamente necessario. La transitività cattura l'idea di una gerarchia coerente di modalità iterate, impedendo che ciò che è necessario in un mondo diventi contingente quando valutato da un altro mondo.

Se R è simmetrica, cioè se per ogni w, w' tali che wRw' si ha anche $w'Rw$, allora risulta valido il principio B: $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$. Questo principio, noto come l'assioma Brouweriano, afferma che se qualcosa è vero, allora è necessariamente possibile. La simmetria rappresenta una proprietà strutturale più controversa dal punto di vista filosofico, poiché sembra implicare che il mondo attuale sia accessibile da tutti i mondi che sono accessibili da esso, una condizione che non è ovvia in tutte le interpretazioni della modalità.

La combinazione di riflessività e transitività genera la logica S4, che è stata storicamente associata all'interpretazione della modalità in termini di dimostrabilità o conoscibilità. Se aggiungiamo anche la simmetria, ottenendo quindi una relazione di equivalenza, arriviamo alla logica S5, dove la relazione di accessibilità connette tutti i mondi tra loro (o meglio, partiziona l'insieme dei mondi in classi di equivalenza all'interno delle quali ogni mondo è accessibile da ogni altro). In S5, la formula $\Box\phi$ è equivalente a $\Box\Box\phi$ e $\Diamond\phi$ è equivalente a $\Box\Diamond\phi$, e tutte le iterazioni di modalità collassano essenzialmente a una singola modalità.

Un'altra proprietà strutturale importante è la serialità: R è seriale se per ogni mondo w esiste almeno un mondo w' tale che wRw' . La serialità corrisponde al principio D: $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$, che afferma che se qualcosa è necessario, allora è anche possibile. Questo principio esclude l'esistenza di necessità inconsistenti e garantisce una forma minimale di coerenza modale.

1.4 La Completezza e la Decidibilità dei Sistemi Modali

Uno dei risultati tecnici fondamentali dimostrati da Kripke riguarda la completezza delle logiche modali rispetto alla semantica dei mondi possibili. Un sistema logico è

completo rispetto a una semantica se ogni formula che è valida nella semantica (cioè vera in tutti i modelli) è anche dimostrabile nel sistema assiomatico. La dimostrazione della completezza per i sistemi modali standard (K, T, S4, S5) rispetto alla semantica dei frame con appropriate proprietà strutturali costituì una conquista maggiore, che stabilì la semantica kripkeana come la semantica canonica per la logica modale.

Il teorema di completezza per il sistema K (il sistema modale minimale che contiene solo le tautologie proposizionali, la regola di necessitazione, e l'assioma K: $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$) afferma che una formula è dimostrabile in K se e solo se è valida in tutti i frame, cioè in tutte le strutture $\langle W, R \rangle$ indipendentemente dalle proprietà di R. Per i sistemi più forti, la completezza viene dimostrata rispetto alla classe di frame che soddisfano le corrispondenti proprietà strutturali: S4 è completo rispetto ai frame riflessivi e transitivi, S5 è completo rispetto ai frame riflessivi, transitivi e simmetrici (o equivalentemente, rispetto ai frame dove R è una relazione di equivalenza), e così via.

La dimostrazione della completezza procede tipicamente attraverso la costruzione canonica: dato un sistema assiomatico S, si costruisce un modello canonico $M^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ dove i mondi sono insiemi massimalmente consistenti di formule (rispetto a S), la relazione di accessibilità è definita come $wR^c w'$ se e solo se per ogni formula ϕ , se $\Box\phi \in w$ allora $\phi \in w'$, e la valutazione è definita come $V^c(p, w) = \text{vero}$ se e solo se $p \in w$. Si dimostra poi, attraverso un'induzione sulla complessità delle formule, che per ogni formula ϕ e ogni mondo w nel modello canonico, $\phi \in w$ se e solo se $M^c, w \models \phi$ (lemma di verità). Questo stabilisce che ogni formula consistente (non refutabile) è soddisfacibile nel modello canonico, da cui segue la completezza.

La decidibilità delle logiche modali proposizionali standard è un altro risultato tecnico importante. Un sistema logico è decidibile se esiste un algoritmo effettivo che, data una qualsiasi formula, determina in un numero finito di passi se la formula è un teorema del sistema. Kripke dimostrò che molti sistemi modali standard, inclusi S4 e S5, sono decidibili. La dimostrazione procede mostrando che se una formula è soddisfacibile, allora è soddisfacibile in un modello finito di dimensione limitata in funzione della complessità della formula. Questo risultato di modello finito permette di ridurre il problema della validità modale a una ricerca esaustiva su un numero finito di modelli finiti, garantendo così la decidibilità.

2.1 Il Problema della Referenza: Descrittivismo vs. Teoria Causale

L'impatto filosofico della teoria dei mondi possibili di Kripke si estese ben oltre i confini della logica formale quando, nelle celebri conferenze tenute a Princeton nel 1970 (poi pubblicate nel 1972 come "Naming and Necessity"), Kripke applicò l'apparato concettuale della semantica modale all'analisi della referenza dei nomi propri e dei termini per generi naturali. Questo lavoro costituì una delle critiche più devastanti mai rivolte alla teoria descrittivista della referenza, che aveva dominato la

filosofia analitica del linguaggio dalla sua formulazione da parte di Gottlob Frege e Bertrand Russell all'inizio del ventesimo secolo.

Secondo la teoria descrittivista, il significato di un nome proprio come "Aristotele" è costituito da un insieme di descrizioni che il parlante associa a quel nome, descrizioni del tipo "il filosofo che scrisse la Metafisica", "l'allievo di Platone e maestro di Alessandro Magno", "il fondatore della logica", e così via. Il referente del nome è quindi l'oggetto che soddisfa queste descrizioni, o la maggior parte di esse secondo alcune versioni più sofisticate della teoria. Questa concezione era strettamente connessa al principio fregeano secondo cui il significato (Sinn) di un'espressione determina il suo referente (Bedeutung).

Kripke demolì sistematicamente la teoria descrittivista attraverso una serie di argomenti convergenti, di cui i più potenti erano basati sulla considerazione di scenari controfattuali, cioè di situazioni possibili ma non attuali. L'argomento modale procedeva nel modo seguente. Consideriamo il nome "Aristotele" e supponiamo, per amor di discussione, che la descrizione definitoria associata a questo nome sia "il filosofo che scrisse la Metafisica". Secondo la teoria descrittivista, questa connessione tra nome e descrizione dovrebbe essere analitica o concettualmente necessaria: parte del significato stesso del nome "Aristotele" sarebbe che esso si riferisce all'autore della Metafisica. Ma consideriamo ora un mondo possibile w in cui Aristotele, il medesimo individuo che nel mondo attuale fu l'allievo di Platone e visse nel quarto secolo avanti Cristo, non scrisse mai la Metafisica. Forse in questo mondo possibile Aristotele morì in giovane età, o decise di dedicarsi alla politica piuttosto che alla filosofia. Quando valutiamo la proposizione "Aristotele avrebbe potuto non scrivere la Metafisica", questa ci appare intuitivamente vera. Ma se il nome "Aristotele" significasse "l'autore della Metafisica", allora quella proposizione sarebbe equivalente a "l'autore della Metafisica avrebbe potuto non scrivere la Metafisica", che a sua volta sarebbe equivalente a "l'autore della Metafisica avrebbe potuto non essere l'autore della Metafisica", una contraddizione apparente.

La conclusione che Kripke ne trae è che i nomi propri non funzionano come descrizioni abbreviate. La loro funzione semantica è radicalmente diversa: i nomi sono designatori rigidi, espressioni che si riferiscono allo stesso oggetto in tutti i mondi possibili in cui quell'oggetto esiste. Formalmente, un termine t è un designatore rigido se per tutti i mondi possibili w e w' , se t denota un oggetto x in w , allora t denota x anche in w' (qualora x esista in w'). Le descrizioni definite, al contrario, sono tipicamente designatori non rigidi o flessibili: la descrizione "l'autore della Metafisica" si riferisce ad Aristotele nel mondo attuale, ma si riferirebbe a una persona diversa (o a nessuno) in mondi possibili dove qualcun altro scrisse quell'opera (o dove essa non fu mai scritta).

2.2 La Teoria Causale della Referenza

Per spiegare come i nomi propri acquisiscono la loro referenza senza mediazione descrittiva, Kripke propone un modello causale-storico. Secondo questo modello, la referenza di un nome viene fissata in un atto iniziale di battesimo o designazione, dove un oggetto viene associato ostensivamente a un nome (ad esempio, i genitori che chiamano il loro neonato "Marco", o gli astronomi che chiamano un pianeta appena scoperto "Nettuno"). Successivamente, il nome viene trasmesso da parlante a parlante attraverso una catena causale: ogni parlante acquisisce il nome da altri parlanti con l'intenzione di usarlo per riferirsi allo stesso oggetto a cui si riferivano i parlanti da cui ha appreso il nome. La referenza del nome è quindi determinata non da proprietà descrittive che il parlante associa al nome, ma dalla posizione del parlante in questa catena causale-storica che lo connette all'atto di battesimo originario.

È importante notare che la teoria causale di Kripke non è intesa come una riduzione analitica della nozione di referenza a nozioni causali. Kripke stesso avverte che sta fornendo un quadro generale o uno schema, non una definizione filosoficamente rigorosa in termini di condizioni necessarie e sufficienti. La catena causale può essere interrotta, deviata o biforcata in modi complicati, e non esiste una formula semplice che catturi tutti i casi. Ciò che è essenziale è l'idea generale che la referenza è costituita da relazioni storiche e causali, non da proprietà qualitative o descrizioni che il parlante può usare per identificare il referente.

Questa concezione della referenza ha conseguenze profonde per la teoria del significato. Se il significato di un nome proprio fosse costituito dalle descrizioni che un parlante gli associa, allora il significato sarebbe interamente "nella testa" del parlante: due parlanti che associano le stesse descrizioni a un nome avrebbero lo stesso significato per quel nome. Ma secondo la teoria causale kripkeana, il significato (inteso come referenza) non è nella testa del parlante: è determinato da fattori esterni, da relazioni causali-storiche che connettono il parlante a oggetti nel mondo. Questo rappresenta una forma di externalismo semantico, l'idea che i contenuti mentali e i significati linguistici non sono determinati esclusivamente dallo stato interno del soggetto, ma dipendono anche dalle sue relazioni con l'ambiente esterno.

2.3 Termini per Generi Naturali e la Necessità A Posteriori

L'analisi kripkeana della referenza si estende dai nomi propri ai termini per generi naturali, con conseguenze ancora più sorprendenti. Consideriamo termini come "acqua", "oro", "tigre", che si riferiscono non a individui particolari ma a tipi o specie naturali. Kripke sostiene che anche questi termini funzionano come designatori rigidi: "acqua" si riferisce alla stessa sostanza (quella che ha la struttura chimica H_2O) in tutti i mondi possibili, e "oro" si riferisce all'elemento con numero atomico 79 in tutti i mondi possibili.

Questa tesi ha una conseguenza filosoficamente esplosiva quando combinata con il fatto che le identità che coinvolgono generi naturali sono scoperte empiricamente,

non conosciute a priori. Prima della scoperta scientifica della composizione chimica dell'acqua, nessuno sapeva che l'acqua è H_2O . Questa era una scoperta empirica, conoscibile solo a posteriori attraverso l'indagine scientifica. Tuttavia, secondo Kripke, l'enunciato "l'acqua è H_2O " esprime una verità necessaria: non esiste un mondo possibile in cui l'acqua non è H_2O . Se una sostanza in un altro mondo possibile avesse una diversa struttura chimica, non sarebbe acqua, indipendentemente da quanto potrebbe assomigliare superficialmente all'acqua.

Questo stabilisce l'esistenza di verità necessarie a posteriori, una categoria che la tradizione filosofica empirista aveva considerato impossibile. L'empirismo classico, da John Locke a David Hume fino al positivismo logico, aveva sostenuto una biforcazione fondamentale: le verità necessarie (quelle che non potrebbero essere false) erano identificate con le verità analitiche (quelle vere in virtù del significato) e quindi conoscibili a priori (indipendentemente dall'esperienza); le verità a posteriori (quelle conoscibili solo attraverso l'esperienza) erano identificate con le verità contingenti (quelle che avrebbero potuto essere false) e sintetiche (non vere in virtù del significato). Kripke rompe questa biforcazione, mostrando che la necessità metafisica (cosa deve essere il caso) e l'apriorità epistemica (cosa possiamo conoscere indipendentemente dall'esperienza) sono nozioni distinte che non collassano l'una nell'altra.

La struttura logica dell'argomento per la necessità dell'identità dell'acqua con H_2O può essere ricostruita nel modo seguente. Supponiamo che "acqua" e " H_2O " siano entrambi designatori rigidi. Nel mondo attuale, è vero che acqua = H_2O . Ora, consideriamo un mondo possibile arbitrario w . Poiché "acqua" e " H_2O " sono designatori rigidi, essi si riferiscono alle stesse sostanze in w che nel mondo attuale. Quindi, se acqua = H_2O nel mondo attuale, allora acqua = H_2O anche in w . Poiché w era un mondo possibile arbitrario, concludiamo che l'acqua è necessariamente H_2O : $\Box(\text{acqua} = H_2O)$.

Più in generale, Kripke dimostra che tutte le identità vere tra designatori rigidi sono necessarie. Questo segue da un principio logico-metafisico che Kripke chiama la necessità dell'identità: se un oggetto a è identico a un oggetto b , allora a è necessariamente identico a b . Formalmente: $(a = b) \rightarrow \Box(a = b)$. La dimostrazione di questo principio procede nel modo seguente. Assumiamo che $a = b$. Per il principio logico di necessità dell'auto-identità, sappiamo che $\Box(a = a)$: ogni oggetto è necessariamente identico a se stesso. Ma se $a = b$, allora tutto ciò che è vero di a è vero anche di b (principio di indiscernibilità degli identici). Quindi, se $\Box(a = a)$, allora $\Box(a = b)$. In altre parole, se a è identico a b , allora a è necessariamente identico a b .

2.4 Il Contingente A Priori e la Distinzione Metafisica/Epistemica

Altrettanto sorprendente è la categoria duale introdotta da Kripke: le verità contingenti conoscibili a priori. Kripke offre esempi ingegnosi di questa categoria apparentemente paradossale. Consideriamo il caso del metro campione parigino.

Questo particolare bastone di metallo, conservato a Parigi, fu utilizzato per definire l'unità di lunghezza del metro. Qualcuno potrebbe fissare la lunghezza del metro nel modo seguente: "un metro è la lunghezza del bastone S al tempo t_0 ". In questo caso, la proposizione "il bastone S è lungo un metro al tempo t_0 " è conoscibile a priori da chi ha fissato il riferimento del termine "metro" in questo modo: non è necessaria alcuna misurazione empirica per saperlo, poiché segue dalla definizione stessa di "metro". Tuttavia, questa verità è contingente: il bastone S avrebbe potuto avere una lunghezza diversa (se fosse stato riscaldato, o se fosse stato costruito in modo leggermente diverso). In un mondo possibile dove il bastone S è più corto o più lungo, esso non sarebbe lungo un metro, anche se in quel mondo "metro" continuerebbe a riferirsi alla lunghezza che il bastone S ha attualmente (poiché "metro" è stato definito come un designatore rigido per quella particolare lunghezza, non come una descrizione flessibile "la lunghezza che S ha").

Questi casi, sebbene più sottili e controversi delle necessità a posteriori, rinforzano ulteriormente la separazione tra le categorie metafisiche (necessario/contingente) e quelle epistemiche (a priori/a posteriori). La distinzione necessario/contingente riguarda il modo in cui le cose devono essere o avrebbero potuto essere: riguarda la modalità metafisica. La distinzione a priori/a posteriori riguarda il modo in cui possiamo conoscere le cose: riguarda la modalità epistémica. Kripke ha mostrato in modo conclusivo che queste due dimensioni sono logicamente indipendenti.

2.5 L'Essenzialismo e le Proprietà Essenziali

La semantica dei mondi possibili fornisce anche un framework naturale per articolare una forma di essenzialismo aristotelico riabilitato. L'essenzialismo è la tesi secondo cui gli oggetti possiedono alcune delle loro proprietà essenzialmente (le proprietà essenziali), mentre altre proprietà sono possedute solo accidentalmente (le proprietà accidentali). Una proprietà P è essenziale per un oggetto x se x non potrebbe esistere senza possedere P; è accidentale se x potrebbe esistere senza possedere P.

Nel linguaggio dei mondi possibili, possiamo definire rigorosamente queste nozioni. Una proprietà P è essenziale per un oggetto x se e solo se in ogni mondo possibile in cui x esiste, x ha la proprietà P. Formalmente, se rappresentiamo "x ha la proprietà P" come $P(x)$, allora P è essenziale per x se e solo se $\Box(E(x) \rightarrow P(x))$, dove $E(x)$ significa "x esiste". Una proprietà è accidentale per x se x ha quella proprietà ma potrebbe non averla, cioè se $P(x) \wedge \Diamond \neg P(x)$.

Kripke sostiene che la nostra pratica linguistica e concettuale ordinaria è impegnata a riconoscere varie forme di proprietà essenziali. Per quanto riguarda le persone, Kripke argomenta che l'origine è essenziale: una persona non avrebbe potuto nascere da genitori diversi o da uno spermatozoo e un ovulo diversi. Questo non è un punto concettuale o linguistico, ma una tesi metafisica: l'identità di una persona è costituita in parte dalla sua origine biologica. Se consideriamo un mondo possibile in cui lo spermatozoo e l'ovulo che di fatto produssero Aristotele invece non si unirono mai,

non stiamo considerando un mondo possibile in cui Aristotele non nacque, ma un mondo possibile in cui Aristotele non esiste affatto. Nessun'altra persona, per quanto somigliante ad Aristotele, sarebbe Aristotele se non provenisse dalla stessa origine biologica.

Analogamente, per gli oggetti materiali comuni, Kripke sostiene che la costituzione materiale originaria è essenziale. Un particolare tavolo di legno non avrebbe potuto essere fatto di ghiaccio: se un oggetto che sembra qualitativamente identico al nostro tavolo fosse stato fatto di ghiaccio fin dall'inizio, non sarebbe lo stesso tavolo, ma un tavolo diverso. Questo non significa che un tavolo non possa perdere o guadagnare materia attraverso il tempo (il nostro tavolo potrebbe essere riparato, con alcune parti sostituite), ma l'origine materiale rimane fissa: il tavolo è essenzialmente fatto del materiale di cui era costituito quando fu inizialmente costruito.

Per i generi naturali, la struttura interna essenziale è determinata dalla scienza empirica. Gli scienziati hanno scoperto che l'oro ha il numero atomico 79, e Kripke sostiene che questo è una proprietà essenziale dell'oro: non potrebbe esistere oro con un numero atomico diverso. Se in un altro pianeta scopriremo una sostanza che sembra esattamente come l'oro ma ha un numero atomico differente, non avremmo scoperto che l'oro può avere un numero atomico diverso, ma avremmo scoperto che quella sostanza non è oro.

3.1 Logica Modale del Primo Ordine e Identità Trans-Mondiale

L'estensione della semantica dei mondi possibili alla logica modale del primo ordine introduce complicazioni tecniche e questioni filosofiche aggiuntive. Mentre la logica modale proposizionale tratta di proposizioni che non hanno struttura interna, la logica modale del primo ordine deve confrontarsi con quantificatori ($\forall x$, $\exists x$) che variano su domini di individui, e con la questione dell'identità trans-mondiale: ha senso parlare dello stesso individuo esistente in mondi possibili differenti?

Un modello per la logica modale del primo ordine è una struttura $M = \langle W, R, D, I \rangle$, dove W e R hanno lo stesso significato che nella semantica proposizionale, D è una funzione che assegna a ogni mondo w un dominio $D(w)$ di individui esistenti in quel mondo, e I è una funzione di interpretazione che assegna estensioni ai predicati e ai termini relativamente a ciascun mondo. La domanda filosoficamente pressante è se i diversi domini $D(w)$ per mondi diversi siano completamente disgiunti, o se invece gli stessi individui possano esistere in mondi multipli.

La posizione del realismo trans-mondiale, difesa da Kripke e da altri, sostiene che la stessa entità numericamente identica può esistere in mondi possibili diversi. Aristotele esiste nel mondo attuale, ma esiste anche in innumerevoli altri mondi possibili: mondi dove divenne pescatore invece che filosofo, mondi dove visse fino a novant'anni invece che morire a sessantadue, mondi dove non incontrò mai Alessandro Magno. Tutti questi scenari alternativi riguardano lo stesso individuo, Aristotele, con proprietà diverse in contesti modali differenti.

David Lewis propose una concezione radicalmente alternativa, il contropartismo (counterpart theory). Secondo Lewis, ogni individuo esiste in un solo mondo possibile, e quando parliamo di come un individuo avrebbe potuto essere diverso, stiamo in realtà parlando di come le sue controparti in altri mondi possibili sono diverse. Una controparte di Aristotele in un altro mondo possibile è un individuo distinto da Aristotele, ma che gli assomiglia in modi rilevanti e che occupa un ruolo analogo in quel mondo. Quando diciamo "Aristotele avrebbe potuto diventare pescatore", secondo Lewis stiamo dicendo che esiste un mondo possibile contenente una controparte di Aristotele che è un pescatore.

La controversia tra realismo trans-mondiale e contropartismo ha ramificazioni tecniche e filosofiche profonde. Il contropartismo di Lewis evita impegni ontologici rispetto all'identità trans-mondiale, ma al prezzo di rendere le affermazioni modali *de re* (riguardo agli oggetti) più complicate: invece di dire semplicemente che Aristotele ha la proprietà modale di poter essere pescatore, dobbiamo dire che una delle controparti di Aristotele ha la proprietà categorica di essere pescatore. Inoltre, la relazione di controparte è vaga e contestualmente sensibile: in alcuni contesti, una controparte remota di Aristotele potrebbe essere rilevante, mentre in altri contesti solo le controparti molto simili contano.

Kripke criticò il contropartismo sostenendo che esso travisa il contenuto delle nostre affermazioni modali ordinarie. Quando dico "lo avrei potuto essere un musicista", sto parlando di me stesso, non di qualche individuo distinto che mi assomiglia. L'intuizione del realismo trans-mondiale è che gli stessi individui, numericamente identici, popolano multipli mondi possibili, e le nostre affermazioni modali sono letteralmente su di loro.

3.2 Domini Costanti vs. Domini Variabili

Una questione tecnica cruciale nella semantica modale del primo ordine riguarda se i domini di individui varino da mondo a mondo. Nella semantica a domini costanti, tutti i mondi hanno lo stesso dominio: $D(w) = D$ per tutti i mondi w . Nella semantica a domini variabili, diversi mondi possono avere domini diversi: $D(w_1) \neq D(w_2)$. La scelta tra queste semantiche ha conseguenze per la validità di certi principi logici.

La formula di Barcan, chiamata così in onore di Ruth Barcan Marcus che la discusse per prima, è l'enunciato: $\Diamond \exists x \phi(x) \rightarrow \exists x \Diamond \phi(x)$. Questa formula è valida nella semantica a domini costanti ma non necessariamente in quella a domini variabili. Intuitivamente, la formula di Barcan afferma che se è possibile che esista qualcosa con una certa proprietà, allora esiste qualcosa che possibilmente ha quella proprietà. In una semantica a domini costanti, questo è valido perché qualunque cosa esiste in un mondo possibile esiste in tutti i mondi (anche se potrebbe avere proprietà diverse). Ma in una semantica a domini variabili, potrebbe essere possibile che esista qualcosa (in un altro mondo) senza che nessuno degli individui che attualmente esistono abbia la possibilità di avere quella proprietà.

La formula conversa di Barcan è: $\exists x \Box \phi(x) \rightarrow \Box \exists x \phi(x)$, che afferma che se esiste qualcosa che necessariamente ha una proprietà, allora necessariamente esiste qualcosa con quella proprietà. Anche questa è valida in semantiche a domini costanti ma può fallire in semantiche a domini variabili se un individuo che esiste in un mondo non esiste in un altro mondo.

La scelta filosofica tra domini costanti e variabili dipende dalla nostra concezione dell'esistenza modale. Se pensiamo che gli individui possano esistere in alcuni mondi possibili ma non in altri (come sembra intuitivo: Aristotele esiste nel mondo attuale, ma non esiste in mondi dove i suoi genitori non si incontrarono mai), allora i domini variabili sono più appropriati. Tuttavia, alcuni filosofi hanno difeso domini costanti interpretando gli "individui" del dominio come oggetti astratti che esistono necessariamente, anche se solo alcuni di essi sono "concreti" o "attualizzati" in un dato mondo.

3.3 Logiche Modali Intensionali: Logica Deontica, Epistemica e Temporale

L'apparato concettuale della semantica dei mondi possibili si è rivelato straordinariamente versatile, applicabile a una varietà di modalità oltre quella alethica (necessità/possibilità metafisica). Kripke stesso contribuì allo sviluppo di logiche modali per altre nozioni modali, dimostrando l'universalità del framework.

La logica deontica studia i concetti di obbligo, permesso e divieto. Nella semantica dei mondi possibili per la logica deontica, i mondi rappresentano scenari normativamente possibili, e la relazione di accessibilità R può essere interpretata come una relazione di preferenza normativa o di conformità deontologica. Un mondo w' è accessibile da w se w' è un mondo deonticamente ideale o permissibile rispetto agli standard normativi di w . L'operatore deontico O (per "obbligatorio") può essere definito come: $O\phi$ è vero in w se e solo se ϕ è vero in tutti i mondi deonticamente ideali accessibili da w . Analogamente, il permesso P può essere definito come: $P\phi$ è vero se e solo se esiste almeno un mondo deonticamente ideale in cui ϕ è vero.

Questa semantica cattura naturalmente principi della logica deontica standard, come il principio che l'obbligatorio implica il permesso: $O\phi \rightarrow P\phi$, che corrisponde alla serialità della relazione di accessibilità deontica (ci deve essere almeno un mondo deonticamente ideale). Tuttavia, la logica deontica è notoriamente afflitta da paradossi, come il paradosso della deroga (contrary-to-duty obligations) e il paradosso del buon samaritano, che dimostrano che la semantica kripkeana standard necessita di raffinamenti per catturare adeguatamente il ragionamento normativo.

La logica epistemica tratta la conoscenza e la credenza. Nella semantica dei mondi possibili per la logica epistemica, i mondi rappresentano scenari epistemicamente possibili dal punto di vista di un agente, e wRw' significa che l'agente non può distinguere tra w e w' , o che w' è compatibile con tutto ciò che l'agente sa in w . L'operatore epistemico K (per "sa che") è definito come: $K\phi$ è vero in w se e solo se ϕ è vero in tutti i mondi epistemicamente accessibili da w . Questa semantica valida

importanti principi della logica epistemica, come il principio della fattività della conoscenza: $K\phi \rightarrow \phi$ (corrispondente alla riflessività di R : l'agente non può distinguere il mondo attuale da se stesso), e il principio dell'introspezione positiva: $K\phi \rightarrow KK\phi$ (corrispondente alla transitività).

La logica temporale, sviluppata da Arthur Prior e poi raffinata con la semantica kripkeana, interpreta i mondi come istanti temporali e la relazione di accessibilità come la relazione di precedenza temporale o di futuro-accessibilità. Gli operatori temporali F (futuro) e P (passato) sono definiti come: $F\phi$ è vero in un tempo t se e solo se esiste un tempo futuro $t' > t$ in cui ϕ è vero; $P\phi$ è vero in t se e solo se esiste un tempo passato $t' < t$ in cui ϕ è vero. Gli operatori duali G (sempre nel futuro) e H (sempre nel passato) sono definiti come: $G\phi$ è vero in t se e solo se per tutti i tempi futuri $t' > t$, ϕ è vero in t' ; $H\phi$ è vero in t se e solo se per tutti i tempi passati $t' < t$, ϕ è vero in t' .

3.4 Logiche Modali Non-Normali e Logiche Minimali

L'apparato kripkeano può essere generalizzato per coprire anche logiche modali cosiddette "non-normali", che non soddisfano tutti i principi della logica modale standard K . Queste logiche sono state investigate da filosofi interessati a nozioni di necessità più deboli o idiosincratice.

La logica modale minimale M è ottenuta rimuovendo dalla logica K la regola di necessitazione (la regola che permette di inferire $\Box\phi$ da ϕ quando ϕ è un teorema). Nella semantica per M , invece di valutare $\Box\phi$ rispetto a mondi accessibili, si introduce una funzione N che assegna a ogni mondo w un insieme $N(w)$ di proposizioni "necessariamente vere" in w . La clausola semantica diventa: $\Box\phi$ è vero in w se e solo se la proposizione espressa da ϕ appartiene a $N(w)$. Questa semantica permette che alcune tautologie non siano necessarie, violando così la regola di necessitazione.

Le logiche monotone e regolari rappresentano gradazioni intermedie tra M e K . Nella logica monotona, $\Box$ soddisfa una forma debole di chiusura deduttiva, mentre nella logica regolare si aggiunge il principio RE (equivalenza sotto necessità): se $\phi \leftrightarrow \psi$ è un teorema, allora $\Box\phi \leftrightarrow \Box\psi$ è un teorema. Queste logiche hanno applicazioni nella modellazione di nozioni come "è richiesto che", dove non vogliamo che tutte le conseguenze logiche di ciò che è richiesto siano automaticamente richieste (evitando il problema della chiusura logica degli obblighi).

3.5 Logiche Modali Multi-Dimensionali e Prodotti

Un'estensione significativa dell'apparato kripkeano è rappresentata dalle logiche modali multi-dimensionali, dove molteplici relazioni di accessibilità operano simultaneamente su un unico insieme di mondi. Un frame bidimensionale è una struttura $\langle W, R_1, R_2 \rangle$ con due relazioni di accessibilità distinte. Questo permette di combinare diverse modalità nello stesso sistema formale.

Un esempio filosoficamente importante è la combinazione di modalità metafisica e epistematica. Consideriamo un frame $\langle W, R_M, R_E \rangle$ dove R_M rappresenta l'accessibilità metafisica (quale mondo è metafisicamente possibile rispetto a quale) e R_E rappresenta l'accessibilità epistematica (quale mondo è epistemicamente indistinguibile rispetto a quale). Con due operatori modali distinti $\Box_M$ e $\Box_E$, possiamo esprimere sottilissime distinzioni filosofiche. Per esempio, la formula $\Box_M \phi \wedge \neg \Box_E \phi$ esprime che ϕ è metafisicamente necessario ma non epistemicamente necessario (non conoscibile a priori): precisamente la categoria delle necessità a posteriori scoperte da Kripke!

La semantica bidimensionale è stata sviluppata in modo particolarmente elaborato da David Chalmers e Frank Jackson per analizzare la distinzione tra intension primaria e intension secondaria. L'intension primaria di un enunciato cattura il suo ruolo epistemo (quali scenari epistemicamente possibili lo verificano), mentre l'intension secondaria cattura il suo ruolo metafisico (quali scenari metafisicamente possibili lo rendono vero). La matrice bidimensionale per un enunciato è una funzione che assegna valori di verità a coppie ordinate di mondi $\langle w_1, w_2 \rangle$, dove w_1 è considerato "come attuale" (determinando quale significato rigido le espressioni indicali hanno) e w_2 è considerato "come controfattuale" (il scenario che stiamo valutando).

3.6 Logica Modale Intuizionista

Un'altra direzione di sviluppo combina la semantica dei mondi possibili con la logica intuizionista di Brouwer e Heyting. La logica intuizionista rifiuta il principio del terzo escluso ($\phi \vee \neg \phi$) e la doppia negazione ($\neg \neg \phi \rightarrow \phi$), riflettendo una concezione costruttivista della verità matematica: una proposizione è vera solo se abbiamo una costruzione o dimostrazione esplicita della sua verità.

Kripke sviluppò una semantica elegante per la logica intuizionista basata su frame parzialmente ordinati $\langle W, \leq, V \rangle$, dove $\leq$ è una relazione di ordine parziale (riflessiva, transitiva e antisimmetrica) sui mondi, interpretata come una relazione di "estensione informazionale": $w \leq w'$ significa che w' rappresenta uno stadio di conoscenza o informazione che estende w . La valutazione V soddisfa una condizione di monotonia: se una formula atomica è vera in w e $w \leq w'$, allora la formula è vera anche in w' . Le clausole semantiche per i connettivi logici sono definite induttivamente:

- $\phi \wedge \psi$ è vero in w se e solo se sia ϕ che ψ sono veri in w
- $\phi \vee \psi$ è vero in w se e solo se ϕ è vero in w oppure ψ è vero in w
- $\phi \rightarrow \psi$ è vero in w se e solo se per ogni $w' \geq w$, se ϕ è vero in w' allora ψ è vero in w'
- $\neg \phi$ è vero in w se e solo se per ogni $w' \geq w$, ϕ è falso in w'

Questa semantica spiega perché il terzo escluso fallisce nell'intuizionismo: $\phi \vee \neg \phi$ è vero in w solo se, per ogni possibile estensione informazionale futura, o avremo

verificato ϕ o avremo verificato che ϕ è impossibile da verificare. Ma potrebbero esserci proposizioni per cui non possiamo garantire nessuna delle due cose.

Curiosamente, la semantica kripkeana per l'intuizionismo ha una struttura formale simile alla semantica per la logica modale S4: entrambe coinvolgono frame riflessivi e transitivi. Infatti, esiste una traduzione precisa (la traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski) che mappa formule della logica intuizionista in formule della logica modale S4 preservando la validità. Questa connessione profonda suggerisce che l'intuizionismo può essere visto come una logica modale della dimostrazione o della conoscibilità costruttiva.

4.1 Il Realismo Modale di David Lewis

Sebbene la semantica dei mondi possibili di Kripke sia diventata lo strumento standard per la logica modale, la natura metafisica dei mondi possibili stessi rimane profondamente controversa. La posizione più radicale è il realismo modale genuino difeso da David Lewis nella sua opera monumentale "On the Plurality of Worlds" (1986). Secondo Lewis, i mondi possibili non sono costruzioni astratte, rappresentazioni linguistiche o concettuali, ma universi concreti realmente esistenti, esattamente dello stesso tipo ontologico del nostro mondo attuale. La differenza tra il mondo attuale e gli altri mondi possibili è puramente indicale: "attuale" è un termine indicale come "qui" o "ora", che si riferisce al mondo in cui il parlante si trova. Dal punto di vista degli abitanti di altri mondi possibili, il loro mondo è attuale e il nostro è meramente possibile.

Lewis sostiene il suo realismo modale con un argomento di indispensabilità filosofica: i mondi possibili concreti forniscono analisi riduttive di una vasta gamma di nozioni filosoficamente problematiche. Le proposizioni possono essere identificate con insiemi di mondi possibili (la proposizione che piove è l'insieme di tutti i mondi possibili in cui piove). Le proprietà possono essere identificate con funzioni da mondi a insiemi di individui, o con insiemi di controparti trans-mondiali. La necessità diventa verità in tutti i mondi, la possibilità diventa verità in almeno un mondo. La semantica modale riceve una fondazione in termini di entità concrete, eliminando il bisogno di primitive modali irriducibili.

Tuttavia, il realismo modale di Lewis ha incontrato resistenze filosofiche formidabili. L'obiezione più comune riguarda la sua incredibilità: sembra ontologicamente eccessivo postulare l'esistenza concreta di infiniti universi disconnessi causalmente solo per fornire una semantica per il discorso modale. Lewis risponde che il beneficio teorico (l'economia ideologica, l'eliminazione di primitive modali misteriose) giustifica il costo ontologico. Ma molti filosofi hanno ritenuto che l'economia ontologica (non moltiplicare le entità senza necessità) sia più importante dell'economia ideologica (non moltiplicare i tipi di entità primitive).

Un'altra obiezione riguarda il problema dell'accidentalità: se i mondi possibili sono universi concreti completamente isolati causalmente dal nostro, come possiamo

avere conoscenza modale? Come possiamo sapere cosa è possibile o necessario se questo richiede conoscenza di universi lontani e inaccessibili? Lewis risponde che la nostra conoscenza modale non deriva da percezione causale dei mondi possibili, ma da un processo di ricombinazione: partiamo dagli elementi del nostro mondo e immaginiamo ricombinazioni di essi. Ma questa risposta sembra reintrodurre un elemento rappresentazionale o concettuale che il realismo modale voleva eliminare.

4.2 L'Attualismo e il Riduzionismo Modale

In contrasto con il realismo lewisiano, l'attualismo modale sostiene che solo il mondo attuale esiste realmente, e i mondi possibili non sono universi alternativi concretamente esistenti ma costruzioni teoriche di qualche tipo. Alvin Plantinga, uno dei principali difensori dell'attualismo, propone di identificare i mondi possibili con stati di cose massimamente comprensivi ma non attualizzati. Uno stato di cose è un'entità astratta che può ottenere o non ottenere (essere attualizzato o non attualizzato). Il mondo attuale è lo stato di cose massimamente comprensivo che ottiene, mentre altri mondi possibili sono stati di cose massimamente comprensivi che non ottengono ma che avrebbero potuto ottenere.

Questa concezione preserva l'attualismo ontologico: solo ciò che è attuale esiste, e i mondi possibili meramente possibili non esistono in senso proprio. Tuttavia, gli stati di cose, anche quelli non attualizzati, esistono come oggetti astratti. Plantinga quindi mantiene un impegno ontologico verso astratti modali, evitando l'inflazione ontologica del realismo lewisiano sui concreti ma pagando un prezzo in termini di primitiva modale: la nozione di "avrebbe potuto ottenere" applicata agli stati di cose rimane una nozione modale primitiva non ulteriormente ridotta.

Robert Stalnaker propone un'altra forma di attualismo, dove i mondi possibili sono identificati con modi in cui il mondo attuale avrebbe potuto essere, cioè con proprietà massimalmente comprensive che il mondo attuale non esemplifica ma avrebbe potuto esemplificare. Questa concezione è più nominalistica di quella di Plantinga, poiché evita l'impegno verso stati di cose come entità primitive, ma condivide con essa l'irriducibilità della modalità.

Un programma riduzionista più ambizioso cerca di eliminare completamente la modalità primitiva. Alcune proposte combinatoriali, ispirate dal lavoro di David Armstrong, tentano di costruire i mondi possibili attraverso ricombinazioni degli elementi ultimi della realtà (universali e particolari). Secondo questo approccio, un mondo possibile è una combinazione ammissibile di universali e particolari, dove l'ammissibilità è governata da principi di ricombinazione. Tuttavia, specificare quali combinazioni sono ammissibili senza invocare nozioni modali si è rivelato estremamente difficile.

4.3 Il Fittizionalismo e il Nominalismo Modale

Una posizione più deflazionistica è il fittizionalismo modale, secondo cui il discorso sui mondi possibili è utile finzione teoretica piuttosto che descrizione letterale della realtà. Quando diciamo "esiste un mondo possibile in cui Aristotele divenne pescatore", non stiamo letteralmente quantificando su un'entità (un mondo possibile), ma stiamo usando una conveniente parafrase di "Aristotele avrebbe potuto diventare pescatore". Il discorso sui mondi possibili è uno strumento di rappresentazione, non un'ontologia.

Gideon Rosen ha difeso una forma sofisticata di fittizionalismo modale che preserva i benefici teoretici della semantica dei mondi possibili senza gli impegni ontologici. Secondo Rosen, possiamo accettare la semantica kripkeana come framework corretto per valutare il discorso modale, considerandola una finzione utile come il discorso sui numeri complessi in fisica. All'interno della finzione dei mondi possibili, certi enunciati sono veri (ad esempio, "esiste un mondo possibile in cui piove"); ma fuori dalla finzione, l'unica cosa che è letteralmente vera è che Aristotele avrebbe potuto diventare pescatore, dove la modalità è primitiva e irriducibile.

Il nominalismo modale, difeso da autori come Geoffrey Hellman e Charles Chihara, cerca di formulare la logica modale senza quantificare su mondi possibili o altri astratti. Hellman propone il modalismo, secondo cui gli enunciati matematici e modali devono essere interpretati modalemente: invece di dire "esiste un numero primo maggiore di ogni numero dato", diciamo "è logicamente possibile che esista una struttura degli interi in cui per ogni numero dato esiste un numero primo maggiore". Questo rovescia l'ordine tradizionale di riduzione: invece di ridurre la modalità a quantificazione su mondi possibili, riduciamo la quantificazione su astratti a modalità primitive.

4.4 Proprietà Haecceistiche e Mondi Qualitativamente Indiscernibili

Una questione metafisica sottile riguarda se i mondi possibili sono individuati puramente dalle loro proprietà qualitative, o se includono anche differenze haecceistiche (differenze puramente numeriche nell'identità degli individui senza differenze qualitative). L'haecceitismo (dal latino haecceitas, "questaità") è la tesi che due mondi potrebbero differire solo per il fatto che gli stessi ruoli qualitativi sono occupati da individui numericamente diversi.

Consideriamo due mondi w_1 e w_2 che sono qualitativamente indiscernibili: hanno esattamente la stessa distribuzione di proprietà qualitative e relazioni. Tuttavia, in w_1 l'individuo a occupa un certo ruolo qualitativo R , mentre in w_2 l'individuo b (numericamente distinto da a) occupa quello stesso ruolo. Secondo l'haecceitismo, w_1 e w_2 sono mondi possibili genuinamente differenti. Secondo l'anti-haecceitismo, non c'è differenza reale tra w_1 e w_2 : essi rappresentano lo stesso mondo possibile descritto in modi diversi.

Kripke, con la sua enfasi sulla rigidità dei nomi e sull'identità trans-mondiale, sembra favorire una forma di haecceitismo: Aristotele è Aristotele in tutti i mondi in cui esiste,

indipendentemente da quali proprietà qualitative possiede. Possiamo concepire un mondo in cui Aristotele e Platone hanno scambiato tutti i loro ruoli qualitativi: in questo mondo, l'individuo chiamato "Aristotele" ha tutte le proprietà che Platone ha nel mondo attuale, e viceversa. Secondo l'haecceitismo kripkeano, questo è un mondo possibile genuino distinto dal mondo attuale.

Lewis, con il suo contropartismo, adotta invece una posizione più anti-haecceitista: non c'è fatto metafisico oggettivo su quale individuo in un altro mondo è "veramente" Aristotele; c'è solo il fatto che certi individui in altri mondi sono controparti più o meno somiglianti di Aristotele, e la somiglianza è costituita interamente da proprietà qualitative e relazioni.

4.5 Essenze Individuali e Individualismo

Collegata al dibattito sull'haecceitismo è la questione delle essenze individuali. Un'essenza individuale di un oggetto x è una proprietà posseduta essenzialmente e unicamente da x : una proprietà che x deve avere in ogni mondo in cui esiste, e che nessun altro oggetto possiede in nessun mondo. Se esistono essenze individuali, esse fornirebbero una base per l'identità trans-mondiale: un individuo in un mondo w è identico a Aristotele se e solo se possiede l'essenza individuale di Aristotele.

Plantinga sostiene che ogni oggetto ha un'essenza individuale, che egli chiama haecceità. L'haecceità di Aristotele è la proprietà di essere Aristotele, o di essere identico ad Aristotele. Questa è trivialmente un'essenza individuale: Aristotele la possiede necessariamente ed esclusivamente. Tuttavia, alcuni filosofi obiettano che questa concezione è metafisicamente vuota: specificare l'essenza di Aristotele come "la proprietà di essere Aristotele" non ci dice nulla di sostantivo su cosa costituisce l'identità di Aristotele.

Altri hanno cercato essenze individuali più sostantive. Kripke, come abbiamo visto, suggerisce che l'origine è essenziale: l'essenza individuale di Aristotele potrebbe includere la proprietà di derivare da quello specifico spermatozoo e quell'ovulo specifico. Ma anche questa proposta incontra difficoltà: i gameti stessi hanno origini, e dovremmo regredire all'infinito? E che dire di oggetti inanimati o di entità astratte che non hanno origini biologiche?

Il problema delle essenze individuali si intreccia con questioni più ampie sul principium individuationis: cosa rende un individuo l'individuo particolare che è? Le risposte spaziano dal substrato materiale alle forme essenziali, dalle origini causali alle haecceità primitive. La semantica kripkeana fornisce un framework per articolare queste posizioni, ma non risolve definitivamente la questione metafisica.

5.1 Metafisica delle Proprietà e Universalì

La semantica dei mondi possibili ha trasformato il dibattito sulla natura delle proprietà e degli universalì. Nel framework kripkeano, possiamo definire

rigorosamente nozioni metafisiche tradizionalmente elusive. Una proprietà può essere identificata con una funzione che assegna a ogni mondo possibile un insieme di individui (quelli che hanno la proprietà in quel mondo). Questa concezione è detta teoria delle proprietà come intensions.

Formalmente, se W è l'insieme dei mondi possibili e $D(w)$ è il dominio degli individui esistenti nel mondo w , allora una proprietà P è una funzione $P: W \rightarrow \wp(\bigcup_{w \in W} D(w))$, dove $\wp$ indica l'insieme potenza. Così, la proprietà di essere un filosofo è una funzione che mappa ogni mondo w all'insieme dei filosofi in w .

Questa concezione permette di distinguere proprietà coestensive che sono tuttavia metafisicamente distinte. Due proprietà P e Q sono coestensive nel mondo w se $P(w) = Q(w)$, cioè se esattamente gli stessi individui hanno entrambe le proprietà in w . Ma P e Q possono essere coestensive nel mondo attuale pur essendo proprietà diverse, se differiscono nella loro estensione in altri mondi possibili. Per esempio, le proprietà "essere umano" e "essere animale razionale" potrebbero essere coestensive nel mondo attuale (se tutti e soli gli esseri umani sono animali razionali nel nostro mondo), ma sono proprietà diverse se esistono mondi possibili dove alcune entità sono animali razionali ma non umane (forse alieni o angeli), o dove alcuni esseri umani non sono razionali.

La distinzione tra proprietà essenziali e accidentali può essere definita con precisione: P è una proprietà essenziale di x se x ha P in ogni mondo in cui x esiste; P è una proprietà accidentale di x se x ha P nel mondo attuale ma esiste un mondo possibile in cui x esiste senza avere P .

Il dibattito tra realismo e nominalismo sugli universali acquisisce nuove dimensioni nel framework modale. Il realismo sugli universali sostiene che le proprietà esistono come entità astratte indipendentemente dagli individui che le esemplificano. Il nominalismo nega l'esistenza di universali, cercando di spiegare il discorso sulle proprietà in termini di somiglianza tra particolari o predicazione linguistica. Il realismo modale di Lewis offre una terza via: le proprietà sono insiemi di controparti transmondiali, entità costruite da individui concreti piuttosto che astratte platoniche.

5.2 Causalità e Controfattuali

Uno dei contributi più influenti dell'apparato dei mondi possibili è stato nel fornire una semantica per i condizionali controfattuali, cioè enunciati della forma "se ϕ fosse stato il caso, allora ψ sarebbe stato il caso", dove ϕ è tipicamente falso nel mondo attuale. Robert Stalnaker e David Lewis svilupparono indipendentemente semantiche per i controfattuali basate su mondi possibili e relazioni di similarità tra mondi.

Nella semantica di Lewis, un controfattuale $\phi \Box \rightarrow \psi$ (che si legge: "se ϕ fosse vero, allora ψ sarebbe vero") è valutato nel modo seguente. Consideriamo tutti i mondi possibili in cui ϕ è vero. Se tra questi mondi, quelli più simili al mondo attuale sono anche mondi in cui ψ è vero, allora il controfattuale è vero; altrimenti è falso. Formalmente, $\phi \Box \rightarrow \psi$ è vero nel mondo w se e solo se o (i) non ci sono mondi

accessibili dove ϕ è vero, oppure (ii) qualche mondo $\phi \wedge \psi$ è più simile a w di qualunque mondo $\phi \wedge \neg\psi$.

La nozione di similarità tra mondi gioca un ruolo cruciale ma problematico in questa semantica. Lewis propone una gerarchia di fattori che determinano la similarità: i mondi sono più simili al mondo attuale se (i) evitano grandi, diffuse e molteplici violazioni delle leggi di natura, (ii) massimizzano l'accordo dei fatti particolari con il mondo attuale, (iii) evitano piccole violazioni miracolose delle leggi, (iv) massimizzano l'accordo delle leggi di natura. Tuttavia, questa proposta rimane controversa: la similarità sembra essere contestualmente variabile e dipendente dagli interessi, piuttosto che una relazione metafisicamente oggettiva.

La semantica dei controfattuali è stata applicata all'analisi della causalità. Lewis propone un'analisi controfattuale della causalità: un evento c causa un evento e se e solo se c ed e effettivamente accadono, e se c non fosse accaduto, e non sarebbe accaduto. Formalmente, c causa e se e solo se $O(c) \wedge O(e) \wedge (\neg O(c) \Box \rightarrow \neg O(e))$, dove $O(x)$ significa " x accade". Questa analisi cattura l'intuizione che le cause sono condizioni necessarie nel senso controfattuale: rimuovendo la causa, rimuoviamo l'effetto.

Tuttavia, l'analisi controfattuale della causalità incontra notevoli difficoltà. Il problema della preemption si presenta quando due processi causali potenziali sono entrambi sufficienti a produrre un effetto, ma uno di essi "anticipa" l'altro. Supponiamo che un assassino A spari a una vittima V , uccidendola, mentre un altro assassino B stava per sparare ma non lo fece perché A aveva già sparato. Lo sparo di A causò la morte di V , ma il controfattuale "se A non avesse sparato, V non sarebbe morta" è falso, poiché B avrebbe sparato. Lewis sviluppò teorie sempre più complesse di causalità tramite catene di dipendenza controfattuale per affrontare questi problemi, ma il dibattito rimane aperto.

5.3 La Metafisica del Tempo e la Persistenza

La semantica dei mondi possibili interagisce profondamente con le questioni sulla natura del tempo e la persistenza degli oggetti attraverso il tempo. Esistono diverse concezioni della struttura temporale della realtà, e ognuna può essere modellata nel framework kripkeano.

L'eternalismo sostiene che passato, presente e futuro sono tutti ugualmente reali: la realtà è una molteplicità quadridimensionale di eventi distribuiti attraverso il tempo, e la distinzione tra passato e futuro è meramente prospettica, analoga alla distinzione spaziale tra qui e là. Nella semantica dei mondi possibili eternalista, ogni mondo possibile include l'intera storia temporale di quell'universo, dal Big Bang (se ne ha uno) fino alla fine dei tempi.

Il presentismo sostiene invece che solo il presente è reale: il passato non esiste più e il futuro non esiste ancora. Il presentismo può essere modellato nella semantica dei mondi possibili interpretando i mondi come istanti temporali piuttosto che come

storie temporali complete. In questo framework, la relazione di accessibilità può rappresentare relazioni temporali: wRw' potrebbe significare che w' è nel futuro di w . Una questione correlata riguarda la persistenza: come fa un oggetto a esistere in momenti temporali differenti rimanendo lo stesso oggetto? L'endurantismo sostiene che gli oggetti persistono essendo interamente presenti a ogni momento in cui esistono: l'oggetto è una entità tridimensionale che "percorre" il tempo. Il perdurantismo (o teoria delle parti temporali) sostiene invece che gli oggetti sono entità quadridimensionali estese nel tempo, composte da parti temporali distinte a momenti diversi: ciò che ordinariamente chiamiamo "un oggetto che persiste" è in realtà una sequenza di stati temporali o fasi temporali.

Nel framework dei mondi possibili, queste posizioni hanno conseguenze diverse per l'identità trans-mondiale e trans-temporale. Se combiniamo perdurantismo con contropartismo lewisiano, otteniamo la visione secondo cui non esiste letteralmente identità né attraverso il tempo né attraverso mondi: c'è solo relazione di controparte tra fasi temporali nello stesso mondo e tra individui in mondi diversi. Se invece combiniamo endurantismo con realismo trans-mondiale kripkeano, otteniamo la visione secondo cui lo stesso individuo tridimensionale può essere letteralmente identico attraverso sia il tempo che i mondi possibili.

5.4 Possibilità Non Realizzate e Sostanze Aristoteliche

La metafisica aristotelica delle sostanze e delle potenzialità può essere ricostruita nel framework dei mondi possibili, sebbene con alcune tensioni concettuali. Aristotele distingueva tra l'attuale (entelecheia) e il potenziale (dynamis): un seme è potenzialmente un albero, uno studente è potenzialmente un filosofo. Queste potenzialità non sono mere possibilità logiche, ma capacità reali radicate nella natura della sostanza.

Nel linguaggio kripkeano, potremmo dire che un oggetto x ha la potenzialità P se esiste un mondo possibile accessibile (in un senso appropriato) in cui x sviluppa P , e questa accessibilità è determinata dalle proprietà essenziali e dalle leggi naturali. Tuttavia, questa traduzione rischia di perdere l'aspetto disposizionale e intrinseco delle potenzialità aristoteliche: per Aristotele, la potenzialità è una proprietà reale attualmente posseduta dalla sostanza, non un mero fatto modale circa mondi alternativi.

Alcuni filosofi neo-aristotelici hanno cercato di sviluppare una metafisica delle disposizioni che supera questo problema. Secondo questa visione, le disposizioni sono proprietà categoriche reali (non riducibili a controfattuali) che conferiscono capacità causali agli oggetti. Un pezzo di sale ha la disposizione di dissolversi in acqua, e questa è una proprietà reale del sale, non semplicemente il fatto che in mondi possibili vicini il sale si dissolverebbe se immerso.

La relazione tra disposizioni e mondi possibili diventa quindi più complessa: le disposizioni di un oggetto determinano quali mondi sono accessibili da esso (cioè quali

sviluppi sono genuinamente possibili per quell'oggetto date le sue nature essenziali), piuttosto che essere costituite da fatti circa mondi possibili. Questo rappresenta un'inversione dell'ordine di riduzione: la modalità è fondata sulla metafisica delle sostanze e delle loro nature, piuttosto che il contrario.

5.5 Possibilità de dicto e de re: Analisi Sottili

La distinzione scolastica tra modalità de dicto e de re acquisisce una formulazione precisa nel framework kripkeano. Una modalità de dicto attribuisce una proprietà modale a una proposizione o dictum: è necessario che $2 + 2 = 4$. Una modalità de re attribuisce una proprietà modale a una res o cosa: Aristotele è necessariamente umano.

Nella logica modale del primo ordine, queste distinzioni si riflettono nell'ambito degli operatori modali. L'enunciato de dicto $\Box \exists x (\text{Filosofo}(x) \wedge \text{Greco}(x))$ dice che è necessario che esista qualcuno che sia un filosofo greco, mentre l'enunciato de re $\exists x \Box (\text{Filosofo}(x) \wedge \text{Greco}(x))$ dice che esiste qualcuno che è necessariamente un filosofo greco. Il primo potrebbe essere vero (se ogni mondopossibile contiene almeno un filosofo greco, anche se individui diversi), mentre il secondo sembra falso (nessun individuo particolare deve essere un filosofo greco in ogni mondo in cui esiste).

Quine aveva sostenuto che la modalità de re era filosoficamente incoerente, conducendo a paradossi come quello del ciclista-matematico. Supponiamo che lo stesso individuo sia un ciclista e un matematico. Come ciclista, è contingentemente un ciclista (avrebbe potuto dedicarsi ad altri sport). Come matematico, è necessariamente un animale razionale (ogni matematico deve essere razionale). Ma allora lo stesso individuo è sia contingentemente sia necessariamente tale che qualche proprietà gli appartiene, il che sembra contraddittorio.

La risposta kripkeana dissolve questo paradosso distinguendo tra proprietà essenziali e accidentali dell'individuo stesso, indipendentemente da come lo descriviamo. L'individuo è essenzialmente umano (e quindi razionale), ma solo accidentalmente un ciclista o un matematico. Il fatto che lo descriviamo come "il ciclista" o "il matematico" non cambia quali proprietà possiede essenzialmente. Le descrizioni sono designatori non rigidi che possono riferirsi a individui diversi in mondi diversi, mentre le proprietà essenziali sono invarianti trans-mondiali dell'individuo stesso.

5.6 Possibilità Metafisica vs. Possibilità Nomologica

Un'importante distinzione che emerge dall'analisi modale kripkeana è quella tra diversi tipi di possibilità. La possibilità metafisica riguarda cosa è possibile data la natura delle cose stesse, indipendentemente dalle leggi naturali contingenti del nostro universo. La possibilità nomologica riguarda cosa è possibile date le leggi naturali attuali.

È nomologicamente impossibile viaggiare più veloce della luce (date le leggi della relatività), ma potrebbe essere metafisicamente possibile: potremmo concepire un mondo possibile con leggi fisiche diverse dove il viaggio superluminale è permesso. Al contrario, è metafisicamente impossibile che l'acqua non sia H_2O , anche se potremmo concepire leggi naturali diverse.

Nel framework dei mondi possibili, possiamo rappresentare questa distinzione con relazioni di accessibilità annidate. Sia R_M la relazione di accessibilità metafisica e R_N la relazione di accessibilità nomologica. Ogni mondo nomologicamente accessibile è anche metafisicamente accessibile ($R_N \subseteq R_M$), ma non viceversa. Quindi $\Box_N \phi \rightarrow \Box_M \phi$ (necessità nomologica implica necessità metafisica), ma non il contrario.

Possiamo definire ulteriori livelli di possibilità: possibilità logica (compatibilità con le leggi della logica), possibilità concettuale (concepibilità), possibilità epistemica (compatibilità con ciò che sappiamo). Ognuna di queste nozioni può essere modellata con diverse relazioni di accessibilità, formando una gerarchia di modalità sempre più restrittive.

La relazione tra queste diverse nozioni di possibilità è stata oggetto di intenso dibattito. David Chalmers ha sostenuto che la possibilità concepibile (ciò che possiamo immaginare coerentemente) non coincide sempre con la possibilità metafisica: potremmo essere in grado di concepire coerentemente scenari che sono metafisicamente impossibili. Per esempio, gli zombie filosofici (esseri fisicamente identici a noi ma privi di coscienza fenomenica) sembrano concepibili, ma alcuni sostengono che sono metafisicamente impossibili se il fisicalismo è vero.

6.1 Il Problema dell'Autenticità dei Mondi Possibili

Una critica fondamentale alla semantica dei mondi possibili riguarda cosa Robert Adams ha chiamato il problema dell'autenticità. Quando valutiamo un enunciato modale come "Aristotele avrebbe potuto diventare pescatore", stiamo veramente parlando di Aristotele in circostanze alternative, o stiamo parlando di qualche rappresentazione o surrogato di Aristotele?

Il contropartismo di Lewis evita l'identità trans-mondiale al prezzo di rendere le affermazioni modali su individui realmente riguardanti altri individui (le controparti). Ma questo sembra tradire il contenuto intuitivo delle nostre affermazioni modali ordinarie. Quando dico "lo avrei potuto essere più alto", intendo parlare di me stesso in circostanze alternative, non di qualcun altro che mi assomiglia.

Il realismo trans-mondiale di Kripke preserva l'identità letterale attraverso i mondi, ma al prezzo di rendere misteriosa la metafisica dell'identità trans-mondiale. Come può letteralmente lo stesso individuo esistere in multipli universi scollegati causalmente? Che senso ha dire che un individuo in un altro mondo è "lo stesso" individuo che in questo mondo?

Peter van Inwagen ha sostenuto che l'intera nozione di identità trans-mondiale è incoerente. Gli individui sono costituiti dalle loro proprietà e relazioni, e se queste differiscono, differisce anche l'individuo. Non c'è un "substrato nudo" che potrebbe essere trasferito da un mondo all'altro mantenendo l'identità mentre tutte le proprietà cambiano.

Una risposta kripkeana potrebbe insistere che l'identità trans-mondiale non è più misteriosa dell'identità trans-temporale ordinaria. Così come lo stesso individuo può esistere in momenti diversi con proprietà differenti, lo stesso individuo può esistere in mondi diversi con proprietà differenti. L'identità è primitiva e non riducibile a somiglianza qualitativa.

6.2 Il Problema della Trans-World Identification

Collegato al problema precedente è la difficoltà epistemologica della trans-world identification: come possiamo sapere quale individuo in un altro mondo possibile è identico a un dato individuo nel mondo attuale? Non possiamo semplicemente usare proprietà qualitative, poiché queste possono variare radicalmente attraverso i mondi. Kripke risponde che non è necessario avere criteri epistemici per l'identità trans-mondiale per capire le affermazioni modali. Possiamo stipulare controfattualmente: "Consideriamo una situazione in cui Aristotele diventò pescatore invece che filosofo." Con questa stipulazione, abbiamo determinato che stiamo parlando di Aristotele, non perché abbiamo identificato qualche individuo in un altro mondo che soddisfa certe descrizioni, ma perché abbiamo semplicemente immaginato Aristotele stesso in circostanze diverse.

Tuttavia, questa risposta è stata criticata come evasiva. Se i mondi possibili sono genuinamente reali (come sostiene Lewis) o anche se sono entità astratte realmente esistenti (come sostiene Plantinga), allora dovrebbe esserci un fatto metafisico oggettivo su quale individuo in quale mondo è Aristotele, e dovremmo poter dire cosa costituisce quel fatto.

Il fittizionalismo modale evita questo problema considerando il discorso sui mondi possibili come strumento euristico piuttosto che ontologia letterale. Non c'è realmente un fatto su "quale individuo in quale mondo è Aristotele", c'è solo il fatto che Aristotele avrebbe potuto essere così-e-così, dove la modalità è primitiva.

6.3 Trivialità del Necessitazionismo

Una preoccupazione sollevata da alcuni filosofi è che l'apparato dei mondi possibili, combinato con certe assunzioni metafisiche, potrebbe collassare tutte le distinzioni modali, producendo una forma di necessitarismo: la tesi che tutto ciò che è attuale è necessario.

L'argomento procede notando che se accettiamo la necessità dell'identità e la necessità dell'origine, insieme al determinismo causale, potremmo essere costretti a concludere che ogni evento che effettivamente accade doveva accadere. Poiché ogni

evento è causato da eventi precedenti, e questi a loro volta da eventi ancora precedenti, e poiché le identità e le origini sono necessarie, l'intera catena causale che porta a qualsiasi evento attuale è fissata necessariamente.

Kripke stesso non accetta questa conclusione, distinguendo tra necessità metafisica e necessità causale. Il fatto che un evento sia determinato causalmente da eventi precedenti non lo rende metafisicamente necessario, poiché la catena causale stessa avrebbe potuto essere diversa. Le leggi di natura potrebbero essere diverse in altri mondi possibili, anche se date le leggi attuali e le condizioni iniziali, il corso degli eventi è determinato.

Tuttavia, se aggiungiamo la tesi che le leggi di natura sono esse stesse metafisicamente necessarie (una posizione controversa ma difesa da alcuni), allora la minaccia del necessitarismo diventa più seria. La risposta standard è negare che le leggi di natura siano metafisicamente necessarie: sono contingenti, anche se nomologicamente necessarie dato il mondo in cui ci troviamo.

6.4 Impossibilità Assolute e Limiti della Concezione Modale

La semantica dei mondi possibili standard assume che ci sia un insieme completo di tutti i mondi possibili. Ma alcuni filosofi hanno argomentato che non possono esserci "tutti i mondi possibili", così come non ci sono "tutti gli insiemi" nella teoria degli insiemi.

Williamson ha proposto che la totalità dei mondi possibili potrebbe essere indefinitamente estensibile: per ogni insieme putativo di mondi possibili, possiamo concepire ulteriori possibilità che lo trascendono. Questo suggerirebbe che la modalità non può essere ridotta a quantificazione su un dominio fisso di mondi possibili.

Altri hanno sostenuto che ci sono impossibilità assolute che non possono essere catturate dalla semantica standard. Per esempio, le contraddizioni logiche sembrano essere assolutamente impossibili, ma nella semantica standard questo è catturato dicendo semplicemente che non ci sono mondi possibili in cui le contraddizioni sono vere. Questo sembra analizzare l'impossibilità come mancanza piuttosto che come un tipo positivo di status modale.

Graham Priest e i logici paraconsistenti hanno proposto logiche in cui alcune contraddizioni possono essere vere, e hanno sviluppato semantiche di mondi impossibili per modellare questo. In queste semantiche estese, alcuni mondi violano le leggi della logica classica. Questo permette di distinguere diversi gradi di impossibilità e di fornire una semantica per ragionamento controfattuale su impossibilità.

6.5 Modalismo e Primitivismo

Una risposta alternativa a tutte le difficoltà della semantica dei mondi possibili è il modalismo o primitivismo modale: la tesi che le nozioni modali sono primitive e irriducibili, e non necessitano né ammettono analisi in termini di mondi possibili o altre nozioni.

I primitivisti come Kit Fine sostengono che l'apparato dei mondi possibili, per quanto utile tecnicamente, non fornisce una vera riduzione o analisi della modalità. Dire che qualcosa è necessario perché è vero in tutti i mondi possibili è spiegare l'oscuro con l'oscuro: cosa sono i mondi possibili se non modi in cui le cose avrebbero potuto essere? E cosa significa "avrebbe potuto essere" se non una nozione modale primitiva?

Fine ha inoltre argomentato che la possibilità metafisica non cattura adeguatamente nozioni più fini come l'essenza. Due proprietà potrebbero essere coestensive in tutti i mondi possibili (necessariamente equivalenti) senza essere parte dell'essenza l'una dell'altra. Per esempio, {Socrate} (l'insieme singleton contenente solo Socrate) esiste necessariamente se e solo se Socrate esiste (dato che gli insiemi non possono esistere senza i loro membri). Quindi Socrate e {Socrate} hanno esattamente gli stessi mondi possibili in cui esistono. Tuttavia, l'esistenza di Socrate è parte dell'essenza di {Socrate}, ma l'esistenza di {Socrate} non è parte dell'essenza di Socrate (Socrate non è essenzialmente tale che esiste il suo insieme singleton; potrebbe esistere senza che la matematica degli insiemi fosse vera).

Questo suggerisce che l'essenza è una nozione più fine della necessità metafisica, e non può essere ridotta al framework dei mondi possibili. Fine propone invece di prendere l'essenza come primitiva e definire la necessità in termini di essa: qualcosa è necessario se è vero in virtù dell'essenza di tutte le cose.

Il primitivismo modale rappresenta quindi un rifiuto del progetto riduzionista che motivava originariamente lo sviluppo della semantica dei mondi possibili. Invece di ridurre la modalità a quantificazione su mondi possibili, dovremmo accettare la modalità come un elemento irriducibile del nostro apparato concettuale, e usare la semantica dei mondi possibili meramente come strumento formale conveniente piuttosto che come ontologia letterale.

7.1 Logiche Modali Multi-Agente e Conoscenza Comune

Un'importante estensione tecnica della semantica kripkeana è lo sviluppo di logiche modali multi-agente, dove multipli operatori modali rappresentano gli stati epistemiche o doxastici di diversi agenti. In un sistema con n agenti, abbiamo n operatori epistemiche $K_1, K_2, \dots, K_n$, dove $K_i\phi$ significa "l'agente i sa che ϕ ".

La semantica kripkeana si estende naturalmente a questo caso: un modello multi-agente è una struttura $M = \langle W, R_1, R_2, \dots, R_n, V \rangle$, dove ogni R_i è la relazione di accessibilità epistemiche per l'agente i . La clausola semantica è: $M, w \models K_i\phi$ se e solo se per ogni w' tale che wR_iw' , si ha $M, w' \models \phi$.

In questo framework possiamo definire nozioni sofisticate come la conoscenza distribuita e la conoscenza comune. La conoscenza distribuita di un gruppo G è ciò che potrebbe essere dedotto pooling insieme tutta la conoscenza degli membri individuali: $D_G\phi$ se e solo se ϕ è vero in tutti i mondi compatibili con tutto ciò che qualche membro di G sa. Formalmente, $D_G\phi$ è vero in w se e solo se ϕ è vero in tutti i mondi w' tali che per ogni agente $i \in G$, wR_iw' .

La conoscenza comune è più forte: ϕ è conoscenza comune in un gruppo G se tutti in G sanno ϕ , tutti in G sanno che tutti in G sanno ϕ , tutti in G sanno che tutti in G sanno che tutti in G sanno ϕ , e così via all'infinito. Formalmente, la conoscenza comune $C_G\phi$ può essere definita come il punto fisso più piccolo dell'operatore E_G (conoscenza di tutti): $C_G\phi \equiv E_G(\phi \wedge C_G\phi)$, dove $E_G\phi \equiv \bigwedge_{i \in G} K_i\phi$.

Nella semantica dei mondi possibili, $C_G\phi$ è vero in w se e solo se ϕ è vero in tutti i mondi raggiungibili da w tramite qualsiasi sequenza finita di passi delle relazioni R_i per $i \in G$. La conoscenza comune gioca un ruolo cruciale nella teoria dei giochi epistematica e nell'analisi del coordinamento sociale: affinché gli agenti possano coordinarsi efficacemente, non basta che condividano informazione, ma devono avere conoscenza comune di quella informazione.

7.2 Logiche Modali Probabilistiche e Credenza

Un'altra estensione importante combina modalità epistematica con probabilità per modellare credenze graduate. Nella logica epistematica classica, un agente o sa qualcosa (con certezza) o non lo sa. Ma nella realtà, gli agenti hanno credenze con diversi gradi di confidenza.

Una semantica probabilistica kripkeana assegna a ogni mondo e ogni agente una distribuzione di probabilità sui mondi epistemicamente accessibili. Un modello probabilistico è una struttura $M = \langle W, \{R_i\}, \{\mu_{i,w}\}, V \rangle$, dove $\mu_{i,w}$ è una misura di probabilità su $\{w' : wR_iw'\}$. L'operatore di credenza $B_i\alpha\phi$ (l'agente i crede ϕ con probabilità almeno α) è definito come: $M, w \models B_i\alpha\phi$ se e solo se $\mu_{i,w}([\phi]) \geq \alpha$, dove $[\phi] = \{w' \in W : M, w' \models \phi\}$.

Questa semantica permette di esprimere principi di razionalità come la coerenza probabilistica. Un agente è probabilisticamente coerente se le sue credenze soddisfano gli assiomi della probabilità. Possiamo anche modellare l'aggiornamento bayesiano: quando un agente acquisisce nuova informazione ϕ , la sua nuova distribuzione di probabilità dovrebbe essere la condizionalizzazione della vecchia distribuzione su ϕ .

Robert Aumann ha utilizzato questo framework per analizzare il famoso risultato dell'impossibilità di accordarsi in disaccordo (agreement theorem): se due agenti bayesiani razionali hanno la stessa distribuzione di probabilità a priori e le loro probabilità a posteriori per una proposizione sono conoscenza comune, allora queste probabilità devono essere identiche. In altre parole, agenti razionali che condividono

le stesse assunzioni iniziali e tutta la loro informazione non possono razionalmente essere in disaccordo.

7.3 Logiche Modali Dinamiche: PDL e Varianti

La logica dinamica proposizionale (Propositional Dynamic Logic, PDL) estende la logica modale per ragionare su programmi e azioni. In PDL, le modalità sono parametrizzate da programmi: $[\alpha]\phi$ significa "dopo ogni esecuzione del programma α , ϕ è vero", mentre $\langle\alpha\rangle\phi$ significa "esiste un'esecuzione di α dopo cui ϕ è vero".

La semantica kripkeana per PDL utilizza frame etichettati: $M = \langle W, \{R_\alpha\}, V \rangle$, dove per ogni programma atomico α esiste una relazione di accessibilità $R_\alpha \subseteq W \times W$. La relazione per programmi complessi è definita induttivamente:

- $R_{\{\alpha;\beta\}} = R_\alpha \circ R_\beta$ (composizione sequenziale)
- $R_{\{\alpha \cup \beta\}} = R_\alpha \cup R_\beta$ (scelta non deterministica)
- $R_{\{\alpha^*\}} = (R_\alpha)^+$ (chiusura riflessiva transitiva, iterazione)
- $R_{\{\phi?\}} = \{\langle w, w \rangle : w \models \phi\}$ (test)

Questa semantica cattura elegantemente la struttura computazionale dei programmi e permette di esprimere proprietà come correttezza parziale ($[\alpha]\phi$: se α termina, allora ϕ) e terminazione ($\langle\alpha\rangle\text{true}$: α può terminare).

La logica epistemica dinamica (Dynamic Epistemic Logic, DEL) combina logica epistemica multi-agente con operatori per azioni che cambiano la conoscenza degli agenti. Gli operatori di aggiornamento pubblico $[\!|\phi]\psi$ significano "dopo l'annuncio pubblico di ϕ , ψ è vero". L'effetto semantico di un annuncio pubblico è restringere il modello ai soli mondi dove ϕ è vero: $M|\phi = \langle \{w \in W : M, w \models \phi\}, R|_{\{\phi\}}, V|_{\{\phi\}} \rangle$.

DEL può modellare puzzle epistemici classici come il problema dei bambini sporchi: n bambini giocano insieme, k di loro hanno la faccia sporca (ma non lo sanno, perché non possono vedere la propria faccia). Il padre annuncia pubblicamente "almeno uno di voi ha la faccia sporca" (che tutti già sapevano) e poi chiede ripetutamente "qualcuno sa se ha la faccia sporca?". Dopo $k-1$ risposte negative, tutti i bambini con la faccia sporca simultaneamente realizzano la loro condizione. DEL spiega questo fenomeno dimostrando come l'annuncio pubblico crea conoscenza comune di ordine superiore.

7.4 Bisimulazione e Invarianza Modale

Un concetto fondamentale nella teoria dei modelli per logiche modali è la bisimulazione, che cattura quando due modelli sono indistinguibili dal punto di vista della logica modale. Una bisimulazione tra due modelli $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ e $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ è una relazione $Z \subseteq W_1 \times W_2$ tale che se $w_1 Z w_2$, allora:

(Atoms) w_1 e w_2 soddisfano le stesse proposizioni atomiche

(Forth) per ogni w_1' tale che $w_1 R_1 w_1'$, esiste w_2' tale che $w_2 R_2 w_2'$ e $w_1' Z w_2'$

(Back) per ogni w_2' tale che $w_2 R_2 w_2'$, esiste w_1' tale che $w_1 R_1 w_1'$ e $w_1' Z w_2'$

Il teorema di invarianza per bisimulazione afferma che se $w_1 Z w_2$ per una bisimulazione Z , allora w_1 e w_2 soddisfano le stesse formule modali: per ogni formula ϕ del linguaggio modale, $M_1, w_1 \models \phi$ se e solo se $M_2, w_2 \models \phi$.

Questo risultato ha profonde conseguenze filosofiche e computazionali. Filosoficamente, mostra che la logica modale non può distinguere tra strutture che sono bisimili: la logica modale è "cieca" a certe differenze strutturali. Computazionalmente, fornisce una base per algoritmi di model checking e verifica automatica: possiamo rimpiazzare modelli infiniti con modelli finiti bisimili per scopi di verifica.

Il teorema di caratterizzazione di Van Benthem afferma il converso in un certo senso: ogni proprietà invariante per bisimulazione che è definibile nella logica del primo ordine è definibile nella logica modale. Questo caratterizza precisamente il potere espressivo della logica modale come il frammento bisimulazione-invariante della logica del primo ordine.

7.5 Modalità Temporizzate e Logica Metrica Temporale

La logica temporale standard tratta il tempo in modo puramente qualitativo: possiamo dire che qualcosa accadrà nel futuro o è accaduto nel passato, ma non quanto lontano nel futuro o passato. La logica temporale metrica (Metric Temporal Logic, MTL) estende la logica temporale con vincoli quantitativi.

In MTL, gli operatori temporali sono parametrizzati da intervalli: $F_{[a,b]}\phi$ significa " ϕ sarà vero in qualche momento tra a e b unità di tempo nel futuro". La semantica richiede che i mondi siano timestamp reali: un modello MTL è una struttura $M = \langle \mathbb{R}_{\geq 0}, <, V \rangle$, dove V assegna valori di verità a proposizioni atomiche a ogni timestamp reale non negativo.

Le clausole semantiche sono: $M, t \models F_{[a,b]}\phi$ se e solo se esiste $t' \in [t+a, t+b]$ tale che $M, t' \models \phi$. MTL è particolarmente utile per specificare proprietà di sistemi real-time, dove i vincoli temporali quantitativi sono essenziali: "il sistema deve rispondere entro 100 millisecondi", "l'allarme deve attivarsi entro 5 secondi dalla rilevazione".

Un risultato importante dovuto a Hirshfeld e Rabinovich è che MTL su $\mathbb{R}_{\geq 0}$ non è decidibile: non esiste algoritmo che determini se una formula MTL arbitraria è soddisfacibile. Questo contrasta con la logica temporale lineare standard (LTL), che è decidibile. La decidibilità può essere recuperata restringendo MTL in vari modi, ad esempio permettendo solo intervalli singolari $[a,a]$ o solo la semantica a tempo discreto $\mathbb{N}$.

7.6 Algebre Modali e Dualità Topologica

Esiste una profonda connessione tra la semantica kripkeana relazionale e le strutture algebriche note come algebre modali, esplorata attraverso la teoria della dualità. Un'algebra modale è una struttura $\langle A, \sqcap, \sqcup, \neg, \Box, \top, \perp \rangle$ dove $\langle A, \sqcap, \sqcup, \neg, \top, \perp \rangle$ è un'algebra booleana e $\Box$ è un operatore unario che soddisfa gli assiomi della logica modale K.

Dato un frame $F = \langle W, R \rangle$, possiamo costruire la sua algebra complessa $A^{F+} = \langle \wp(W), \cap, \cup, -, \Box^{F+}, W, \emptyset \rangle$, dove $\Box^{F+}$ è definito come: $\Box^{F+}(X) = \{w \in W : \text{per ogni } w' \in W, \text{ se } wRw' \text{ allora } w' \in X\}$. Questa costruzione mappa frame in algebre modali.

Conversamente, data un'algebra modale A , possiamo costruire il suo frame duale F^{A+} formato dall'insieme degli ultrafiltri primi di A con una relazione di accessibilità definita appropriatamente. Sotto certe condizioni (completezza e atomicità), queste costruzioni sono inverse l'una dell'altra, stabilendo una dualità tra frame e algebre.

La teoria della dualità permette di tradurre problemi nella semantica kripkeana in problemi algebrici e viceversa. Per esempio, la completezza di un sistema modale rispetto a una classe di frame corrisponde alla definibilità equazionale della corrispondente classe di algebre. Questo ha portato a potenti tecniche proof-theoretic per dimostrare completezza e decidibilità.

La dualità di Stone per algebre booleane (che rappresentano logica proposizionale) generalizza alla dualità di Jónsson-Tarski per algebre modali. In dimensione superiore, esiste una ricca interazione con la topologia: gli spazi topologici possono essere visti come frame modali generalizzati, e la logica modale può essere interpretata topologicamente con $\Box\phi$ interpretato come " ϕ è vero nell'interno" (la necessità come verità in un intorno).

8.1 Filosofia della Matematica: Modalismo Matematico

La semantica dei mondi possibili ha avuto un impatto significativo sulla filosofia della matematica, particolarmente attraverso il programma del modalismo matematico. Secondo il modalismo, gli enunciati matematici devono essere interpretati modalemente piuttosto che come affermazioni sull'esistenza di oggetti astratti platonici.

Geoffrey Hellman ha sviluppato una ricostruzione modale della matematica dove, ad esempio, gli assiomi dell'aritmetica di Peano non affermano l'esistenza di numeri, ma piuttosto descrivono la struttura che qualsiasi progressione infinita deve avere necessariamente. L'enunciato "esiste un numero primo maggiore di ogni numero dato" diventa "necessariamente, in qualsiasi progressione infinita, per ogni elemento esiste un elemento primo maggiore".

Formalmente, invece di quantificare su numeri, quantifichiamo modalemente su strutture: $\Diamond \exists X(\text{PROGRESSIONE}(X)) \rightarrow \Box \forall X(\text{PROGRESSIONE}(X) \rightarrow \exists y \in X \forall z \in X(\text{MAGGIORE}(y,z) \rightarrow \text{PRIMO}(y)))$. Se è possibile che esista una progressione infinita (e lo è, altrimenti la matematica sarebbe incoerente), allora necessariamente ogni tale progressione ha la proprietà che per ogni elemento esiste un elemento primo maggiore.

Questo approccio evita l'impegno ontologico verso entità astratte platoniche, ma al prezzo di prendere la modalità come primitiva. I critici sostengono che la modalità metafisica è tanto problematica ontologicamente quanto gli astratti matematici. I difensori rispondono che la modalità è comunque necessaria per altri scopi filosofici, quindi non rappresenta un'inflazione ontologica addizionale.

Un problema tecnico è la forza logica richiesta: per esprimere la matematica standard, Hellman deve assumere che è possibile che esistano strutture di qualsiasi cardinalità infinita. Ma cosa garantisce questa possibilità? Se i mondi possibili sono interpretati lewisianamente come universi concreti, otteniamo la garanzia (poiché Lewis accetta universi di ogni dimensione), ma al prezzo di un impegno ontologico massiccio. Se i mondi possibili sono interpretati come costruzioni astratte, abbiamo semplicemente spostato il problema.

8.2 Filosofia della Fisica: Interpretazioni Modali della Meccanica Quantistica

La meccanica quantistica presenta notori puzzle interpretativi, e alcuni fisici e filosofi hanno proposto interpretazioni modali che utilizzano il framework dei mondi possibili. L'interpretazione modale, sviluppata da Bas van Fraassen e altri, interpreta il formalismo quantistico in termini di possibilità e attualità senza postulare collasso della funzione d'onda o universi paralleli.

Secondo questa interpretazione, lo stato quantistico $|\psi\rangle$ non descrive la realtà attuale ma l'insieme di possibilità reali. Quando misuriamo un'osservabile, non causiamo un collasso fisico, ma scopriamo quale delle possibilità è attualizzata. Le correlazioni quantistiche non richiedono azione a distanza, ma riflettono vincoli modali sulle possibilità composibili.

Tuttavia, l'interpretazione modale incontra difficoltà tecniche. Il teorema di Kochen-Specker dimostra che non è possibile assegnare valori definiti a tutte le osservabili simultaneamente in modo consistente con la struttura matematica della teoria quantistica. Questo limita severamente quali tipi di possibilità modali possono essere postulate.

Un'altra proposta è l'interpretazione a mondi multipli (many-worlds interpretation, MWI) di Hugh Everett, che può essere formulata usando il linguaggio dei mondi possibili. Secondo MWI, ogni volta che una misurazione quantistica avviene, l'universo si dirama in mondi multipli corrispondenti ai diversi possibili risultati. Tutti i rami sono ugualmente reali (contrariamente all'interpretazione modale dove solo uno è attualizzato).

La relazione tra MWI e la semantica kripkeana è complicata. I mondi di Everett non sono mondi possibili nel senso kripkeano standard (modi alternativi in cui il mondo potrebbe essere), ma piuttosto sono porzioni causalmente disconnesse di una realtà multiversale. Non ci sono genuini controfattuali nella MWI: tutti i possibili risultati effettivamente accadono in qualche ramo.

8.3 Etica e Filosofia Morale: Conseguenzialismo Modale

Nell'etica normativa, la semantica dei mondi possibili fornisce strumenti per analizzare rigorosamente teorie consequenzialiste. Il consequenzialismo valuta le azioni in base alle loro conseguenze: un'azione è giusta se e solo se le sue conseguenze sono buone quanto quelle di qualsiasi alternativa disponibile.

Ma quali conseguenze? Le conseguenze attuali, o le conseguenze che l'azione avrebbe potuto avere? Frank Jackson ha distinto tra consequenzialismo oggettivo (basato sulle conseguenze attuali) e consequenzialismo soggettivo (basato sulle conseguenze previste o prevedibili). Nella semantica dei mondi possibili, possiamo formulare queste distinzioni con precisione.

Il consequenzialismo oggettivo valuta un'azione α nel mondo attuale w comparando il valore del mondo più vicino dove α viene eseguita con il valore dei mondi più vicini dove azioni alternative vengono eseguite. Se $V(w')$ è il valore morale del mondo w' , e w_α è il mondo più vicino dove α è eseguita, allora α è permissibile in w se e solo se per ogni azione alternativa β , $V(w_\alpha) \geq V(w_\beta)$.

Il consequenzialismo soggettivo invece valuta le azioni basandosi sui mondi epistemicamente accessibili per l'agente. Un'azione è soggettivamente giusta se massimizza il valore atteso rispetto a ciò che l'agente sa o crede. Se W_E è l'insieme dei mondi epistemicamente possibili per l'agente, e P è la distribuzione di probabilità soggettiva dell'agente su W_E , allora α è soggettivamente ottimale se massimizza $\sum_{w \in W_E} P(w) \cdot V(w_\alpha, w)$, dove w_α, w è il mondo che risulterebbe dall'eseguire α se w fosse attuale.

Questa formalizzazione rivela tensioni profonde nel consequenzialismo. Nelle situazioni di incertezza radicale, il consequenzialismo oggettivo può richiedere azioni che sono soggettivamente irrazionali, mentre il consequenzialismo soggettivo può approvare azioni che risultano disastrose. La teoria consequenzialista deve bilanciare questi due poli, e la semantica modale fornisce il framework per articolare precisamente questo bilanciamento.

8.4 Metaetica: Realismo Modale e Proprietà Morali

La semantica dei mondi possibili ha anche implicazioni per la metaetica, lo studio della natura delle proprietà e dei giudizi morali. Il realismo morale sostiene che esistono fatti morali oggettivi indipendenti dalle credenze umane. Ma come sono costituiti questi fatti?

Una proposta interessante è il realismo modale morale: le proprietà morali sono proprietà modali. Essere moralmente obbligatorio significa essere richiesto in tutti i mondi deonticamente ideali o permissibili. Il bene morale è ciò che è valorizzato in tutti i mondi assiologicamente ottimali.

Questa concezione ha il vantaggio di fornire una metafisica naturalistica per le proprietà morali: invece di postulare un regno platonico di valori, identifichiamo le proprietà morali con patterns attraverso mondi possibili. Un'azione è giusta non perché esemplifica una forma platonica di giustizia, ma perché accade in tutti i mondi che soddisfano certi standard normativi.

Tuttavia, questa proposta solleva interrogativi. Cosa determina quali mondi sono deonticamente ideali o assiologicamente ottimali? Se questi sono definiti circolarmente in termini di ciò che è moralmente buono o giusto, non abbiamo veramente ridotto il morale al modale. Se sono definiti indipendentemente, dobbiamo specificare in termini non morali cosa rende un mondo ideale, il che è precisamente il progetto del naturalismo morale che molti trovano fallimentare.

David Lewis ha proposto una teoria disposizionale dei valori: valorizzare X è essere disposti a desiderare X in condizioni di idealizzazione cognitiva e riflessiva. Nella semantica dei mondi possibili, questo diventa: X è buono per l'agente A se A desidererebbe X in tutti i mondi dove A è pienamente informato e razionale. Ma questa relativizza i valori agli agenti, producendo una forma di relativismo piuttosto che realismo oggettivo.

8.5 Filosofia del Linguaggio: Intensioni, Estensioni e Significato

La distinzione fregeana tra senso (Sinn) e referenza (Bedeutung) può essere riformulata elegantemente nella semantica dei mondi possibili. L'estensione di un'espressione è ciò a cui si riferisce nel mondo attuale. L'intensione è una funzione che assegna a ogni mondo possibile l'estensione che l'espressione avrebbe in quel mondo.

Per i termini singolari, l'estensione è un individuo e l'intensione è una funzione da mondi a individui (o a nulla, se il termine non si riferisce in quel mondo). Per i predicati, l'estensione è un insieme di individui e l'intensione è una funzione da mondi a insiemi. Per le proposizioni, l'estensione è un valore di verità e l'intensione è una funzione da mondi a valori di verità (equivalente a un insieme di mondi).

Kripke ha mostrato che per i designatori rigidi, l'intensione è una funzione costante: lo stesso individuo in tutti i mondi. Ma questo significa che designatori rigidi coreferenziali hanno la stessa intensione? "Hesperus" e "Phosphorus" si riferiscono entrambi rigidamente a Venere, quindi hanno la stessa intensione (la funzione costante su Venere), ma hanno sensi fregeani diversi.

Questo suggerisce che l'intensione kripkeana non cattura completamente il senso fregeano. Il senso include anche il modo di presentazione o il valore cognitivo

dell'espressione. Due designatori rigidi coreferenziali possono avere la stessa intensione ma diversi modi di presentazione.

David Kaplan ha sviluppato una semantica bidimensionale che distingue tra carattere e contenuto. Il carattere è una funzione da contesti (incluso chi parla, quando, dove) a contenuti. Il contenuto è una funzione da mondi possibili a estensioni (equivalente all'intensione kripkeana). Per gli indicali come "io" o "ora", il carattere varia con il contesto ma determina un contenuto rigido: "io" pronunciato da Kripke si riferisce rigidamente a Kripke in tutti i mondi.

8.6 Filosofia della Mente: Contenuto Mentale e Esternalismo

La semantica dei mondi possibili ha influenzato profondamente i dibattiti sul contenuto mentale. L'esternalismo semantico, di cui Kripke fu pioniere, sostiene che il contenuto dei nostri pensieri e stati mentali non è determinato esclusivamente dallo stato interno del cervello, ma dipende anche dalle relazioni con l'ambiente esterno.

Hilary Putnam ha esteso l'analisi kripkeana dei termini per generi naturali agli stati mentali. Nel famoso esperimento mentale della Terra Gemella, Putnam immagina un pianeta identico alla Terra in ogni dettaglio interno, ma dove la sostanza chiamata "acqua" ha la formula chimica XYZ invece di H_2O . I gemelli sulla Terra e sulla Terra Gemella hanno stati cerebrali identici, ma quando il gemello terrestre pensa "l'acqua è bagnata", sta pensando a H_2O , mentre il gemello su Terra Gemella sta pensando a XYZ. Quindi il contenuto mentale non è determinato dallo stato cerebrale.

Nella semantica dei mondi possibili, possiamo formulare questo come segue: il contenuto di uno stato mentale è un'intensione (un insieme di mondi possibili), ma quale intensione dipende dal mondo in cui il soggetto si trova. Due soggetti in mondi diversi possono avere stati cerebrali funzionalmente identici ma pensare contenuti diversi perché i termini nella loro lingua hanno referenze diverse.

Tyler Burge ha esteso questo esternalismo al contenuto concettuale: anche i concetti possono avere contenuti determinati socialmente. Se un soggetto usa la parola "artrite" credendo erroneamente che si riferisca a dolori in qualsiasi articolazione (non solo nelle giunture), sta comunque pensando all'artrite (non a qualche condizione più generale) perché "artrite" nella sua comunità linguistica si riferisce a una condizione specifica. Il contenuto è determinato dalla pratica sociale, non dalla comprensione individuale.

Questi argomenti hanno conseguenze per la possibilità dell'autocoscienza privilegiata. Se il contenuto è esternamente determinato, come possiamo avere accesso privilegiato ai nostri pensieri? La risposta standard distingue tra accesso alle proprietà qualitative strette (che sono interne) e conoscenza del contenuto ampio (che è externalista). Ma questa distinzione rimane controversa.

8.7 Metafisica dell'Identità Personale

La semantica dei mondi possibili fornisce strumenti per analizzare l'identità personale attraverso il tempo e attraverso i mondi. Quando immaginiamo controfattuali come "se fossi nato in Cina invece che in America, sarei diverso", stiamo presumendo che ci sia un fatto determinato su quale persona in quel scenario controfattuale sarebbe io. Ma su cosa si basa questa identità trans-mondiale? Derek Parfit ha sostenuto che l'identità personale è indeterminata in certi casi. Considera il teletrasporto: una macchina scansiona il tuo corpo molecola per molecola, distruggendolo, e trasmette l'informazione a Marte dove una replica identica viene costruita. La persona su Marte è te? Parfit sostiene che non c'è fatto determinato: tutto ciò che importa moralmente (continuità psicologica e fisica) è preservato, ma la domanda metafisica dell'identità numerica può mancare di risposta determinata.

Nel framework dei mondi possibili, questa indeterminatezza può essere modellata con supervalutazioni: un enunciato di identità trans-temporale o trans-mondiale è determinatamente vero solo se è vero sotto tutte le precisificazioni ammissibili della relazione di identità. Se in alcune precisificazioni la persona su Marte è te e in altre no, allora è indeterminato se è te.

Alternativamente, il perdurantismo lewisiano dissolve il problema: la domanda non è se la persona-stadio su Marte è identica alla persona-stadio sulla Terra, ma se sono parti della stessa persona quadridimensionale. Questa è una questione di convenzione su come tracciamo i confini delle persone attraverso il tempo e lo spazio.

9.1 Logica Modale Paraconsistente e Mondi Impossibili

Le logiche paraconsistenti sono sistemi logici che tollerano contraddizioni senza trivializzare (nel senso che da una contraddizione non segue tutto). Graham Priest ha sviluppato logiche modali paraconsistenti usando una semantica di mondi impossibili: mondi dove le leggi della logica classica falliscono.

Un frame con mondi impossibili è una struttura $M = \langle W \cup W', R, V \rangle$, dove W è l'insieme dei mondi possibili (che obbediscono alla logica classica) e W' è l'insieme dei mondi impossibili (dove le contraddizioni possono essere vere). La relazione di accessibilità R può connettere mondi possibili a mondi impossibili.

Le clausole semantiche sono modificate per permettere che $\phi \wedge \neg\phi$ sia vero in mondi impossibili. In particolare, la negazione è trattata in modo paraconsistente: da ϕ e $\neg\phi$ non segue arbitrariamente ψ . Questo permette di ragionare su situazioni impossibili o incoerenti senza collasso logico.

L'applicazione filosofica è modellare credenze incoerenti e ragionamento ipotetico su impossibilità. Gli agenti reali spesso hanno sistemi di credenze inconsistenti senza credere tutto. Possiamo modellare questo con logica epistemica paraconsistente dove i mondi epistemicamente accessibili per un agente includono mondi impossibili rappresentanti le sue credenze incoerenti.

Similmente, possiamo ragionare su controfattuali impossibili: "Se la matematica classica fosse inconsistente, quali teoremi sarebbero ancora provabili?". Questo richiede valutare scenari dove le leggi della logica sono diverse, precisamente ciò che i mondi impossibili permettono di fare.

9.2 Logica Modale Fuzzy e Incertezza Vaga

La logica fuzzy tratta verità graduale: proposizioni possono essere vere in grado compreso tra 0 (completamente falso) e 1 (completamente vero). La combinazione di logica modale con logica fuzzy produce logiche modali fuzzy adatte a ragionare su possibilità e necessità graduate.

Un modello modale fuzzy è $M = \langle W, R, V \rangle$ dove V assegna a ogni proposizione atomica p e mondo w un grado di verità $V(p, w) \in [0, 1]$. La relazione di accessibilità R può essere anch'essa fuzzy: $R: W \times W \rightarrow [0, 1]$, dove $R(w, w')$ rappresenta il grado in cui w' è accessibile da w .

Le clausole semantiche usano t-norme per congiunzione e t-conorme per disgiunzione. Per le modalità, $\Box\phi$ può essere definito come: $V(\Box\phi, w) = \inf_{\{w' \in W\}} \max(1 - R(w, w'), V(\phi, w'))$, usando l'implicazione di Łukasiewicz. Questo cattura l'idea che la necessità è il minimo grado in cui ϕ è vero nei mondi accessibili.

Un'applicazione è modellare ragionamento su possibilità vaghe. La proposizione "è possibile che Giovanni sia calvo" può essere gradualmente vera dipendendo da quanti capelli Giovanni ha. Se la calvizie è un predicato vago con bordi sfumati, allora la possibilità che qualcuno sia calvo è anch'essa graduata.

9.3 Logica Modale Intuizionista Avanzata

Abbiamo già menzionato la semantica kripkeana per la logica intuizionista. Sviluppi più avanzati combinano intuizionismo con modalità per produrre logiche modali intuizioniste, dove sia i connettivi logici che gli operatori modali sono interpretati costruttivamente.

In una logica modale intuizionista, né $\Diamond\phi \vee \Diamond\neg\phi$ né $\Box\phi \vee \neg\Box\phi$ sono validi: non possiamo assumere che o ϕ è possibile o ϕ è impossibile senza avere una dimostrazione costruttiva di uno dei due. Questo riflette una concezione costruttivista della modalità dove la possibilità richiede un'effettiva costruzione o dimostrazione di realizzabilità.

La semantica usa frame con due ordini parziali: uno per l'estensione informazionale (come nell'intuizionismo standard) e uno per l'accessibilità modale. Questi ordini interagiscono in modi complessi, producendo una ricca struttura di validità modali intuizioniste.

Le logiche modali intuizioniste hanno applicazioni in informatica teoretica, particolarmente nella semantica di linguaggi di programmazione con tipi dipendenti e effetti computazionali. Gli operatori modali possono rappresentare effetti come non-determinismo, stati mutabili, o eccezioni, mentre la base intuizionista garantisce proprietà costruttive desiderabili.

9.4 Logiche Modali con Quantificazione su Mondi

Un'estensione radicale del framework modale permette quantificazione esplicita su mondi possibili nel linguaggio oggetto. Invece di avere solo operatori modali impliciti, abbiamo variabili per mondi e quantificatori su di essi: $\forall w \phi(w)$ significa "in ogni mondo w , $\phi(w)$ ".

Un linguaggio con quantificazione mondiale include variabili $w, w_1, w_2, \dots$ per mondi, un operatore $@$ per attualità ($@w\phi$ significa " ϕ è vero nel mondo w "), e quantificatori $\forall w, \exists w$. La semantica è una semantica di Kripke estesa dove le assegnazioni di variabili includono assegnazioni ai nomi di mondi.

Questo linguaggio è molto più espressivo della logica modale standard. Possiamo esprimere che due mondi sono accessibili: $\exists w_1 \exists w_2 (R(w_1, w_2))$, dove R è un predicato per la relazione di accessibilità. Possiamo quantificare su classi di mondi: $\forall w (P(w) \rightarrow Q(w))$ dice che tutti i mondi con proprietà P hanno proprietà Q .

Tuttavia, questa maggiore espressività ha un costo: molte delle belle proprietà metalogiche delle logiche modali standard (decidibilità, completezza finita) si perdono. Le logiche con quantificazione mondiale si avvicinano alla logica del second ordine in potere espressivo e complessità computazionale.

10.1 Intelligenza Artificiale e Ragionamento Modale

L'intelligenza artificiale contemporanea sta riscoprendo l'importanza del ragionamento modale per sistemi intelligenti robusti. I sistemi di IA devono ragionare su possibilità, necessità, conoscenza, credenza e obblighi per interagire efficacemente con umani e ambienti complessi.

La pianificazione automatica richiede ragionamento su azioni e loro effetti possibili. La logica dinamica proposizionale fornisce un framework formale per specificare e verificare piani. Gli agenti autonomi devono modellare le credenze e le intenzioni di altri agenti, richiedendo logica epistemica multi-agente. I sistemi etici di IA devono ragionare su obblighi e permessi, richiedendo logica deontica.

Tuttavia, l'applicazione pratica della logica modale in IA incontra sfide. Le complessità computazionali dei problemi di soddisfacibilità e inferenza modale possono essere proibitive (molte logiche modali sono PSPACE-complete o peggio). Sono necessari algoritmi efficienti e approssimazioni tractabili.

Inoltre, le logiche modali standard fanno assunzioni di idealizzazione (chiusura logica, introspezione perfetta) che non valgono per agenti reali computazionalmente limitati.

Le logiche modali limitate (bounded modal logics) cercano di modellare agenti con risorse computazionali finite, ma questo è un'area di ricerca attiva con molti problemi aperti.

10.2 La Natura Ultima dei Mondi Possibili

Nonostante decenni di dibattito, non c'è consenso sulla natura metafisica dei mondi possibili. Sono universi concreti (Lewis), stati di cose astratti (Plantinga), proprietà che il mondo avrebbe potuto avere (Stalnaker), rappresentazioni linguistiche (Carnap), o finzioni utili (Rosen)?

Una proposta recente è il primitivismo strutturato: i mondi possibili sono primitive strutturali la cui natura è parzialmente costituita dalla loro posizione in una rete di relazioni modali. Non dobbiamo ridurre i mondi possibili a qualcos'altro, ma accettarli come parte dell'arredo fondamentale dell'ontologia, con la loro natura determinata olisticamente dalle loro interconnessioni.

Un'altra direzione promettente è l'approccio categoria-teoretico: rappresentare mondi possibili e loro relazioni usando teoria delle categorie piuttosto che teoria degli insiemi. Questo potrebbe fornire un framework più flessibile che evita alcuni problemi tecnici della semantica standard (come la dipendenza da una cardinalità particolare di mondi).

10.3 Modalità e Meccanica Quantistica: Sviluppi Recenti

La relazione tra modalità e meccanica quantistica rimane un'area di ricerca attiva. Alcuni fisici e filosofi stanno esplorando interpretazioni modaliste della teoria quantistica che evitano problemi delle interpretazioni standard.

L'interpretazione relazionale della meccanica quantistica (RQM) di Carlo Rovelli suggerisce che gli stati quantistici sono relazionali piuttosto che assoluti: lo stato di un sistema è relativo all'osservatore. Questo può essere formulato modalemente: le proprietà che un sistema possiede possibilmente dipendono dalla prospettiva dell'osservatore.

La teoria delle storie consistenti di Robert Griffiths fornisce un framework per ragionare su sequenze temporali di eventi quantistici. Questo può essere modellato con logica temporale modale, dove le possibilità ammissibili sono le storie consistenti secondo le regole della teoria quantistica.

Un problema aperto è sviluppare una logica modale completamente soddisfacente per il ragionamento quantistico che rispetti sia i teoremi no-go (come Kochen-Specker e Bell) sia le intuizioni modali ordinarie. La logica quantistica di Birkhoff e von Neumann abbandona troppe caratteristiche della logica classica; serve un punto medio che preservi più struttura logica modale.

10.4 Metafisica Post-Kripkeana: Grounding e Fondamentalità

La metafisica contemporanea ha sviluppato nuovi strumenti concettuali che interagiscono con la semantica modale kripkeana in modi complessi. La nozione di grounding (fondazione) studia relazioni di dipendenza metafisica: cosa rende vero cos'altro, cosa è metafisicamente più fondamentale.

Il grounding è distinto dalla necessità: ϕ può essere vero in virtù di ψ (ψ fonda ϕ) anche se non è necessariamente vero che se ψ allora ϕ . Per esempio, la verità della proposizione "l'erba è verde" è fondata dal fatto che l'erba è verde, ma questa relazione di fondazione non è modale (non stiamo dicendo che necessariamente, se l'erba è verde, allora è vero che l'erba è verde, anche se questo accade di essere vero). Come dovremmo modellare il grounding nella semantica dei mondi possibili? Una proposta è usare ordini parziali sui fatti o proposizioni all'interno di ciascun mondo: $\phi \leq_w \psi$ significa che ϕ è almeno tanto fondamentale quanto ψ nel mondo w . Ma questa proposta lascia molte questioni aperte su come il grounding interagisce con la modalità.

Un altro concetto post-kripkeano è l'essenza, come articolata da Kit Fine. Come abbiamo visto, Fine sostiene che l'essenza non può essere ridotta alla necessità. La semantica dei mondi possibili potrebbe aver bisogno di essere arricchita con struttura addizionale (operatori di essenza, relazioni di fondazione) per catturare questi concetti metafisici più fini.

10.5 Domande Aperte e Direzioni Future

Molte questioni fondamentali rimangono aperte nella teoria dei mondi possibili:

Sul piano metafisico: Qual è la natura ultima dei mondi possibili? Esiste una risposta oggettiva, o la scelta tra diverse concezioni è una questione di convenzione pragmatica?

Sul piano logico: Quali sono i limiti espressivi della logica modale? Esistono nozioni modali che non possono essere catturate nella semantica kripkeana standard? Come dovremmo estendere il framework per incorporare nozioni come grounding, essenza, e dipendenza metafisica?

Sul piano epistemico: Come acquisiamo conoscenza modale? Se i mondi possibili sono astratti o remoti, come possiamo avere accesso epistemico a loro? Esiste una facoltà speciale di intuizione modale, o la conoscenza modale è riducibile ad altre forme di conoscenza?

Sul piano semantico: Come dovremmo trattare la vaghezza e l'indeterminatezza nelle attribuzioni modali? È determinato quali scenari sono genuinamente possibili? Come interagisce l'indeterminatezza modale con altre forme di indeterminatezza?

Sul piano applicativo: Come possiamo rendere il ragionamento modale computazionalmente trattabile per applicazioni pratiche in IA, verifica software, e sistemi di decisione? Quali approssimazioni sono legittime e quali compromettono l'adeguatezza del framework?

La teoria dei mondi possibili di Kripke ha trasformato la filosofia analitica, fornendo strumenti precisi per articolare distinzioni metafisiche, semantiche ed epistemiche che precedentemente rimanevano vaghe. Ha dimostrato che la modalità può essere trattata con rigore logico-matematico, aprendo nuove vie di indagine filosofica. Le conseguenze di questa rivoluzione concettuale continuano a propagarsi attraverso filosofia, logica, linguistica, informatica e scienze cognitive, promettendo ulteriori sviluppi e scoperte nei decenni a venire.

Parte II

1.1 Strutture di Kripke: Definizioni Formali

Una struttura di Kripke (o modello di Kripke) per la logica modale proposizionale è una tripla ordinata $M = \langle W, R, V \rangle$, dove:

- W è un insieme non vuoto di mondi possibili (o stati)
- $R \subseteq W \times W$ è una relazione binaria di accessibilità su W
- $V: \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ è una funzione di valutazione, dove PROP è l'insieme delle variabili proposizionali e $\mathcal{P}(W)$ denota l'insieme delle parti di W

La relazione di accessibilità R può essere interpretata come segue: per $w, w' \in W$, scriviamo wRw' (o $R(w, w')$) per indicare che il mondo w' è accessibile dal mondo w . La funzione di valutazione V assegna a ogni variabile proposizionale p l'insieme dei mondi in cui p è vera: $V(p) = \{w \in W : p \text{ è vera in } w\}$.

Un frame di Kripke è una coppia $F = \langle W, R \rangle$, ottenuta da una struttura omettendo la funzione di valutazione. I frame catturano le proprietà strutturali dei modelli indipendentemente dall'interpretazione delle variabili proposizionali.

1.2 Semantica della Verità: Relazione di Soddisfacimento

La relazione di soddisfacimento $\models$ tra mondi e formule è definita induttivamente sulla complessità delle formule del linguaggio modale $L(\Box, \Diamond)$. Per ogni modello $M = \langle W, R, V \rangle$, ogni mondo $w \in W$, e ogni formula $\phi \in L(\Box, \Diamond)$:

Casi Base:

- $M, w \models p$ se e solo se $w \in V(p)$, per $p \in \text{PROP}$
- $M, w \models \top$ (sempre)
- $M, w \not\models \perp$ (mai)

Connettivi Booleani:

- $M, w \models \neg\phi$ se e solo se $M, w \not\models \phi$
- $M, w \models \phi \wedge \psi$ se e solo se $M, w \models \phi$ e $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \vee \psi$ se e solo se $M, w \models \phi$ oppure $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \rightarrow \psi$ se e solo se $M, w \not\models \phi$ oppure $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \leftrightarrow \psi$ se e solo se ($M, w \models \phi$ se e solo se $M, w \models \psi$)

Operatori Modali:

- $M, w \models \Box\phi$ se e solo se per ogni $w' \in W$ tale che wRw' , si ha $M, w' \models \phi$
- $M, w \models \Diamond\phi$ se e solo se esiste $w' \in W$ tale che wRw' e $M, w' \models \phi$

Gli operatori $\Box$ (necessità) e $\Diamond$ (possibilità) sono duali: $\Diamond\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$ e $\Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi$.

1.3 Validità e Conseguenza Logica

Una formula ϕ è:

- soddisfacibile in un modello M se esiste $w \in W$ tale che $M, w \models \phi$
- valida in un modello M (scriviamo $M \models \phi$) se per ogni $w \in W$, $M, w \models \phi$
- valida in un frame $F = \langle W, R \rangle$ (scriviamo $F \models \phi$) se per ogni funzione di valutazione V , si ha $\langle W, R, V \rangle \models \phi$
- valida in una classe di frame C (scriviamo $C \models \phi$) se per ogni $F \in C$, si ha $F \models \phi$
- logicamente valida (scriviamo $\models \phi$) se ϕ è valida in tutti i frame

Una formula ψ è conseguenza logica di un insieme di formule Γ in un frame F (scriviamo $\Gamma \models_F \psi$) se per ogni modello M basato su F e ogni mondo w , se $M, w \models \phi$ per ogni $\phi \in \Gamma$, allora $M, w \models \psi$.

1.4 Proprietà Strutturali della Relazione di Accessibilità

La relazione di accessibilità R può soddisfare diverse proprietà strutturali. Per ogni $w, w', w'' \in W$:

Proprietà Fondamentali:

1. Riflessività: $\forall w(wRw)$

- Ogni mondo è accessibile da se stesso

2. Simmetria: $\forall w \forall w' (wRw' \rightarrow w'Rw)$

- La relazione di accessibilità è simmetrica

3. Transitività: $\forall w \forall w' \forall w'' ((wRw' \wedge w'Rw'') \rightarrow wRw'')$

- Se w' è accessibile da w e w'' è accessibile da w' , allora w'' è accessibile da w

4. Serialità: $\forall w \exists w' (wRw')$

- Da ogni mondo esiste almeno un mondo accessibile

5. Euclideanità: $\forall w \forall w' \forall w'' ((wRw' \wedge wRw'') \rightarrow w'Rw'')$

- Se w' e w'' sono entrambi accessibili da w , allora w'' è accessibile da w'

Proprietà Derivate:

6. Equivalenza: R è riflessiva, simmetrica e transitiva

7. Ordine Parziale: R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva

8. Ordine Totale: R è un ordine parziale in cui ogni coppia di elementi è confrontabile

1.5 Teoria della Corrispondenza

Uno dei risultati fondamentali della semantica kripkeana è la teoria della corrispondenza, che stabilisce corrispondenze biunivoche tra proprietà strutturali dei frame e validità di specifiche formule modali.

Teorema 1.5.1 (Corrispondenze Fondamentali):

Proprietà di R	Formula Corrispondente	Nome Sistema
---	---	---
Riflessività	$\Box \phi \rightarrow \phi$	T (Assioma T)
Simmetria	$\phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$	B (Assioma Brouweriano)
Transitività	$\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$	4 (Assioma 4)
Serialità	$\Box \phi \rightarrow \Diamond \phi$	D (Assioma D)
Euclideanità	$\Diamond \phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$	5 (Assioma 5)

Dimostrazione (Riflessività $\leftrightarrow$ T):

($\Rightarrow$) Assumiamo che R sia riflessiva. Sia $M = \langle W, R, V \rangle$ un modello arbitrario e $w \in W$. Supponiamo $M, w \models \Box \phi$. Per definizione, per ogni w' tale che wRw' , si ha $M, w' \models \phi$. Poiché R è riflessiva, wRw . Quindi $M, w \models \phi$. Abbiamo dimostrato che $\Box \phi \rightarrow \phi$ è valida in ogni modello riflessivo.

($\Leftarrow$) Assumiamo che $\Box\phi \rightarrow \phi$ sia valida in ogni modello basato su $F = \langle W, R \rangle$. Supponiamo per assurdo che R non sia riflessiva. Allora esiste $w \in W$ tale che $\neg(wRw)$. Costruiamo una valutazione V tale che $V(p) = \{w' : wRw'\}$. Nel modello $M = \langle W, R, V \rangle$, abbiamo $M, w \models \Box p$ (poiché p è vera in tutti i mondi accessibili da w), ma $M, w \not\models p$ (poiché $w \notin V(p)$). Questo contraddice la validità di $\Box p \rightarrow p$. Quindi R deve essere riflessiva. ■

Teorema 1.5.2 (Transitività $\leftrightarrow$ Assioma 4):

Un frame $F = \langle W, R \rangle$ è transitivo se e solo se $F \models \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$.

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Assumiamo R transitiva. Sia $M = \langle W, R, V \rangle$ un modello e $w \in W$. Supponiamo $M, w \models \Box\phi$. Dobbiamo mostrare $M, w \models \Box\Box\phi$, cioè per ogni w' tale che wRw' , si ha $M, w' \models \Box\phi$. Sia w' tale che wRw' . Per mostrare $M, w' \models \Box\phi$, consideriamo w'' arbitrario con $w'Rw''$. Per transitività, da wRw' e $w'Rw''$ segue wRw'' . Poiché $M, w \models \Box\phi$, abbiamo $M, w'' \models \phi$. Quindi $M, w' \models \Box\phi$.

($\Leftarrow$) Assumiamo $F \models \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$. Supponiamo per assurdo che R non sia transitiva: esistono w, w', w'' con $wRw', w'Rw''$, ma $\neg(wRw'')$. Definiamo $V(p) = W \setminus \{w''\}$. Nel modello $M = \langle W, R, V \rangle$:

- $M, w'' \not\models p$ (per definizione)
- $M, w' \models \Box p$ (poiché w'' è l'unico mondo accessibile da w' dove p è falsa, ma $w'Rw''$)

Aspetta, devo correggere. Se $w'Rw''$, allora w'' è accessibile da w' , quindi $M, w' \not\models \Box p$. Ridefiniamo: $V(p) = \{w''' : wRw'''\}$. Allora:

- $M, w \models \Box p$ (per definizione di $V(p)$)
- $M, w' \not\models \Box p$ (poiché $w'Rw''$ ma $w'' \notin V(p)$)
- Quindi $M, w \not\models \Box\Box p$

Questo contraddice $F \models \Box p \rightarrow \Box\Box p$. Quindi R deve essere transitiva. ■

1.6 I Sistemi Modali Standard

I principali sistemi di logica modale sono definiti come segue:

Sistema K (il sistema modale minimale):

- Tutti i teoremi della logica proposizionale
- Assioma K: $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$
- Regola di Necessitazione (RN): Se $\vdash \phi$, allora $\vdash \Box\phi$
- Modus Ponens: Se $\vdash \phi$ e $\vdash \phi \rightarrow \psi$, allora $\vdash \psi$

Sistema T = K + Assioma T ($\Box\phi \rightarrow \phi$)

Sistema D = K + Assioma D ($\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$)

Sistema S4 = T + Assioma 4 ($\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$)

Sistema S5 = S4 + Assioma 5 ($\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$) oppure T + Assioma 5

Sistema B = T + Assioma B ($\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$)

Teorema 1.6.1 (Caratterizzazione dei Sistemi):

- K è completo rispetto alla classe di tutti i frame
- D è completo rispetto ai frame seriali
- T è completo rispetto ai frame riflessivi
- S4 è completo rispetto ai frame riflessivi e transitivi (preordini)
- S5 è completo rispetto ai frame di equivalenza (riflessivi, simmetrici, transitivi)
- B è completo rispetto ai frame riflessivi e simmetrici

2.1 Il Modello Canonico

La dimostrazione della completezza per i sistemi modali procede attraverso la costruzione del modello canonico. Sia S un sistema modale normale (che contiene K e è chiuso sotto le regole).

Definizione 2.1.1 (Insieme Massimalmente Consistente):

Un insieme Γ di formule è massimalmente S-consistente se:

1. Γ è S-consistente (non esiste una derivazione di $\perp$ da Γ in S)
2. Per ogni formula ϕ , si ha $\phi \in \Gamma$ oppure $\neg\phi \in \Gamma$

Lemma 2.1.2 (Proprietà degli MCS):

Se Γ è un insieme massimalmente S-consistente, allora:

1. Se $\phi \in \Gamma$ e $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$, allora $\psi \in \Gamma$
2. $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ se e solo se $\phi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$
3. $\phi \vee \psi \in \Gamma$ se e solo se $\phi \in \Gamma$ oppure $\psi \in \Gamma$
4. $\neg\phi \in \Gamma$ se e solo se $\phi \notin \Gamma$

Definizione 2.1.3 (Modello Canonico):

Il modello canonico per S è $M^c = \langle W^c, R^c, V^c \rangle$ dove:

- $W^c = \{\Gamma : \Gamma \text{ è un insieme massimalmente S-consistente}\}$
- $\Gamma R^c \Delta$ se e solo se $\{\phi : \Box\phi \in \Gamma\} \subseteq \Delta$
- $V^c(p) = \{\Gamma \in W^c : p \in \Gamma\}$

Lemma 2.1.4 (Lemma di Verità):

Per ogni formula ϕ e ogni $\Gamma \in W^c$:

$M^c, \Gamma \models \phi$ se e solo se $\phi \in \Gamma$

Dimostrazione (per induzione sulla complessità di ϕ):

Caso base ($\phi = p$): Per definizione di V^c , $M^c, \Gamma \models p$ se e solo se $\Gamma \in V^c(p)$ se e solo se $p \in \Gamma$.

Caso induttivo ($\phi = \neg\psi$):

$M^c, \Gamma \models \neg\psi \Leftrightarrow M^c, \Gamma \not\models \psi \Leftrightarrow$ (per IH) $\psi \notin \Gamma \Leftrightarrow$ (per massimalità) $\neg\psi \in \Gamma$

Caso induttivo ($\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$): Segue dal Lemma 2.1.2 e dall'ipotesi induttiva.

Caso induttivo ($\phi = \Box\psi$):

($\Rightarrow$) Supponiamo $M^c, \Gamma \models \Box\psi$. Allora per ogni $\Delta \in W^c$ con $\Gamma R^c \Delta$, si ha $M^c, \Delta \models \psi$. Per ipotesi induttiva, $\psi \in \Delta$ per ogni Δ con $\Gamma R^c \Delta$. Supponiamo per assurdo che $\Box\psi \notin \Gamma$. Allora $\neg\Box\psi \in \Gamma$, quindi $\Diamond\neg\psi \in \Gamma$. L'insieme $\{\neg\psi\} \cup \{\phi : \Box\phi \in \Gamma\}$ è consistente (altrimenti esisterebbero $\phi_1, \dots, \phi_n$ con $\Box\phi_1, \dots, \Box\phi_n \in \Gamma$ e $\vdash_S \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$, da cui $\Box(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi) \in \Gamma$, e quindi $\Box\psi \in \Gamma$ per K, contraddizione). Quindi possiamo estendere questo insieme a un MCS Δ . Per costruzione, $\Gamma R^c \Delta$ e $\neg\psi \in \Delta$, quindi $\psi \notin \Delta$, contraddizione.

($\Leftarrow$) Supponiamo $\Box\psi \in \Gamma$. Sia Δ tale che $\Gamma R^c \Delta$. Per definizione di R^c , $\psi \in \Delta$. Per ipotesi induttiva, $M^c, \Delta \models \psi$. Quindi $M^c, \Gamma \models \Box\psi$. ■

2.2 Teorema di Completezza Forte

Teorema 2.2.1 (Completezza Forte):

Per ogni sistema modale normale S e ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\phi\}$:

Se $\Gamma \models_S \phi$, allora $\Gamma \vdash_S \phi$

Dimostrazione:

Supponiamo $\Gamma \not\models_S \phi$. Allora $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ è S -consistente. Estendiamo questo insieme a un MCS Δ . Nel modello canonico M^c , per il Lemma di Verità, $M^c, \Delta \models \psi$ per ogni $\psi \in \Gamma$ e $M^c, \Delta \models \neg\phi$. Quindi $\Gamma \not\models_S \phi$. ■

Corollario 2.2.2 (Completezza Debole):

Per ogni formula ϕ : Se $\models_S \phi$, allora $\vdash_S \phi$

2.3 Completezza Rispetto a Classi di Frame

Per dimostrare che un sistema S è completo rispetto a una classe di frame C , dobbiamo mostrare che il frame canonico $F^c = \langle W^c, R^c \rangle$ appartiene a C .

Teorema 2.3.1 (S4 e Frame Riflessivi Transitivi):

Se $S = S4$, allora R^c è riflessiva e transitiva.

Dimostrazione:

Riflessività: Sia $\Gamma \in W^c$. Dobbiamo mostrare $\Gamma R^c \Gamma$, cioè $\{\phi : \Box\phi \in \Gamma\} \subseteq \Gamma$. Sia $\Box\phi \in \Gamma$. Poiché $\vdash_{S4} \Box\phi \rightarrow \phi$ (assioma T), abbiamo $\phi \in \Gamma$. Quindi R^c è riflessiva.

Transitività: Siano $\Gamma, \Delta, \Theta \in W^c$ con $\Gamma R^c \Delta$ e $\Delta R^c \Theta$. Dobbiamo mostrare $\Gamma R^c \Theta$. Sia $\Box\phi \in \Gamma$. Poiché $\vdash_{S4} \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ (assioma 4), abbiamo $\Box\Box\phi \in \Gamma$. Per $\Gamma R^c \Delta$, abbiamo $\Box\phi \in \Delta$. Per $\Delta R^c \Theta$, abbiamo $\phi \in \Theta$. Quindi $\{\phi : \Box\phi \in \Gamma\} \subseteq \Theta$, cioè $\Gamma R^c \Theta$. ■

Teorema 2.3.2 (S5 e Frame di Equivalenza):

Se $S = S5$, allora R^c è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione:

La riflessività e transitività seguono come per S4. Per la simmetria, dobbiamo mostrare che se $\Gamma R^c \Delta$ allora $\Delta R^c \Gamma$. Sia $\Box\phi \in \Delta$. Dobbiamo mostrare $\phi \in \Gamma$. Supponiamo $\neg\phi \in \Gamma$. Allora $\Diamond\neg\phi \in \Gamma$. Poiché $\vdash_{S5} \Diamond\psi \rightarrow \Box\Diamond\psi$ (assioma 5), abbiamo $\Box\Diamond\neg\phi \in \Gamma$. Per $\Gamma R^c \Delta$, abbiamo $\Diamond\neg\phi \in \Delta$, quindi $\neg\Box\phi \in \Delta$, quindi $\Box\phi \notin \Delta$, contraddizione. Quindi $\phi \in \Gamma$. ■

2.4 Decidibilità e Proprietà del Modello Finito

Definizione 2.4.1 (Proprietà del Modello Finito):

Un sistema modale S ha la proprietà del modello finito (FMP) se ogni formula consistente con S è soddisfacibile in un modello finito basato su un frame della classe che caratterizza S .

Teorema 2.4.2 (FMP implica Decidibilità):

Se un sistema modale normale S ha la proprietà del modello finito, allora il problema della soddisfacibilità per S è decidibile.

Dimostrazione (schema):

Data una formula ϕ , possiamo enumerare tutti i modelli finiti fino a una certa dimensione limitata dalla complessità di ϕ . Se ϕ è soddisfacibile, troveremo un modello finito che la soddisfa. Se non la troviamo dopo aver esaminato tutti i modelli di dimensione appropriata, ϕ è insoddisfacibile. ■

Teorema 2.4.3 (Filtrazione):

Sia $M = \langle W, R, V \rangle$ un modello e Φ un insieme finito di formule chiuso sotto sottoformule. Definiamo una relazione di equivalenza su W :

$w \equiv_{\Phi} w'$ se e solo se per ogni $\phi \in \Phi$, $(M, w \models \phi \Leftrightarrow M, w' \models \phi)$

Il modello filtrato $M^f = \langle W^f, R^f, V^f \rangle$ è definito da:

- $W^f = \{[w]_{\Phi} : w \in W\}$ (classi di equivalenza)
- $[w]_{\Phi} R^f [w']_{\Phi}$ se e solo se esiste $u \in [w]_{\Phi}$ e $u' \in [w']_{\Phi}$ con uRu'
- $V^f(p) = \{[w]_{\Phi} : w \in V(p)\}$

Allora per ogni $\phi \in \Phi$ e $w \in W$:

$M, w \models \phi$ se e solo se $M^f, [w]_{\Phi} \models \phi$

Corollario 2.4.4:

I sistemi K, T, S4, S5 hanno la proprietà del modello finito e sono quindi decidibili.

3.1 Sintassi e Semantica

Il linguaggio della logica modale quantificata QML estende il linguaggio modale proposizionale con:

- Variabili individuali $x, y, z, \dots$
- Quantificatori $\forall, \exists$
- Simboli predicativi P^n (di arietà n)
- Simboli funzionali f^n (di arietà n)
- Costanti individuali $a, b, c, \dots$

Definizione 3.1.1 (Termine):

L'insieme TERM dei termini è definito induttivamente:

- Ogni variabile x è un termine
- Ogni costante a è un termine
- Se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e f è un simbolo funzionale n -ario, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

Definizione 3.1.2 (Formula):

L'insieme FORM delle formule è definito induttivamente:

- Se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e P è un simbolo predicativo n -ario, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è una formula (atomica)
- Se ϕ e ψ sono formule, allora $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \Box\phi, \Diamond\phi$ sono formule
- Se ϕ è una formula e x è una variabile, allora $\forall x \phi$ e $\exists x \phi$ sono formule

3.2 Modelli a Domini Variabili

Un modello a domini variabili per QML è una struttura $M = \langle W, R, D, I \rangle$ dove:

- W è un insieme non vuoto di mondi
- $R \subseteq W \times W$ è la relazione di accessibilità
- $D: W \rightarrow P(U)$ è una funzione dominio, dove U è l'universo degli individui e $D(w)$ è l'insieme degli individui esistenti nel mondo w
- I è una funzione di interpretazione che assegna:
 - A ogni costante a e mondo w un elemento $I_w(a) \in D(w)$
 - A ogni simbolo funzionale f^n e mondo w una funzione $I_w(f): D(w)^n \rightarrow D(w)$
 - A ogni simbolo predicativo P^n e mondo w un insieme $I_w(P) \subseteq D(w)^n$

Un'assegnazione è una funzione $\sigma: \text{VAR} \rightarrow U$ che assegna individui alle variabili. Data un'assegnazione σ , definiamo $\sigma[x \mapsto d]$ come l'assegnazione che differisce da σ al più nell'assegnare d a x .

Definizione 3.2.1 (Denotazione dei Termini):

La denotazione $\llbracket t \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}}$ di un termine t nel mondo w sotto l'assegnazione σ è definita:

- $\llbracket x \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}} = \sigma(x)$
- $\llbracket a \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}} = I_w(a)$
- $\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}} = I_w(f)(\llbracket t_1 \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}})$

Definizione 3.2.2 (Relazione di Soddisfacimento):

$M, w, \sigma \models \phi$ è definito induttivamente:

- $M, w, \sigma \models P(t_1, \dots, t_n)$ se e solo se $(\llbracket t_1 \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\{M,w,\sigma\}}) \in I_w(P)$
- $M, w, \sigma \models \neg \phi$ se e solo se $M, w, \sigma \not\models \phi$
- $M, w, \sigma \models \phi \wedge \psi$ se e solo se $M, w, \sigma \models \phi$ e $M, w, \sigma \models \psi$
- $M, w, \sigma \models \Box \phi$ se e solo se per ogni w' con wRw' , $M, w', \sigma \models \phi$
- $M, w, \sigma \models \forall x \phi$ se e solo se per ogni $d \in D(w)$, $M, w, \sigma[x \mapsto d] \models \phi$
- $M, w, \sigma \models \exists x \phi$ se e solo se esiste $d \in D(w)$ tale che $M, w, \sigma[x \mapsto d] \models \phi$

3.3 Domini Costanti vs. Domini Variabili

In un modello a domini costanti, $D(w) = D$ per ogni $w \in W$. Questo significa che gli stessi individui esistono in tutti i mondi.

Teorema 3.3.1 (Formula di Barcan):

La formula $\Diamond \exists x \phi(x) \rightarrow \exists x \Diamond \phi(x)$ è valida in tutti i modelli a domini costanti ma non in tutti i modelli a domini variabili.

Dimostrazione:

Domini costanti: Supponiamo $M, w \models \Diamond \exists x \phi(x)$. Allora esiste w' con wRw' tale che $M, w' \models \exists x \phi(x)$. Quindi esiste $d \in D(w')$ con $M, w', \sigma[x \mapsto d] \models \phi(x)$. Poiché $D(w') = D(w)$, abbiamo $d \in D(w)$. Quindi $M, w, \sigma[x \mapsto d] \models \Diamond \phi(x)$, da cui $M, w \models \exists x \Diamond \phi(x)$.

Domini variabili (controesempio): Sia $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_2)\}$, $D(w_1) = \{a\}$, $D(w_2) = \{b\}$ con $a \neq b$. Sia $I_{w_2}(P) = \{b\}$ e $I_{w_1}(P) = \emptyset$. Allora $M, w_1 \models \Diamond \exists x P(x)$ (poiché esiste b in w_2 che soddisfa P), ma $M, w_1 \not\models \exists x \Diamond P(x)$ (poiché l'unico individuo in $D(w_1)$ è a , e a non soddisfa P in nessun mondo accessibile). ■

Teorema 3.3.2 (Formula Conversa di Barcan):

La formula $\exists x \Box \phi(x) \rightarrow \Box \exists x \phi(x)$ è valida in tutti i modelli a domini costanti ma può fallire nei modelli a domini variabili.

Dimostrazione:

Domini costanti: Supponiamo $M, w \models \exists x \Box \phi(x)$. Allora esiste $d \in D(w)$ tale che $M, w, \sigma[x \mapsto d] \models \Box \phi(x)$. Quindi per ogni w' con wRw' , $M, w', \sigma[x \mapsto d] \models \phi(x)$. Poiché i domini sono costanti, $d \in D(w')$ per ogni w' . Quindi $M, w' \models \exists x \phi(x)$ per ogni w' con wRw' . Da cui $M, w \models \Box \exists x \phi(x)$.

Domini variabili (controesempio): Sia $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_2)\}$, $D(w_1) = \{a, b\}$, $D(w_2) = \{a\}$. Sia $I_{w_1}(P) = I_{w_2}(P) = \{a\}$. Allora $M, w_1 \models \exists x \Box P(x)$ (poiché a soddisfa P in entrambi i mondi), ma $M, w_1 \not\models \Box \exists x P(x)$ potrebbe fallire se interpretiamo in modo appropriato... Aspetta, questo esempio non funziona. Ricostruiamo: $D(w_1) = \{a\}$, $D(w_2) = \emptyset$, $I_{w_1}(P) = \{a\}$. Allora $M, w_1 \models \exists x \Box P(x)$ (vacuamente, dato che a non ha mondi successori dove esistere? No, questo è confuso).

Meglio: $D(w_1) = \{a, b\}$, $D(w_2) = \{a\}$, $R = \{(w_1, w_2)\}$, $I_{w_1}(P) = \{a, b\}$, $I_{w_2}(P) = \{a\}$. Allora per ogni $d \in D(w_1)$, se $d = a$ allora $M, w_1, \sigma[x \mapsto a] \models \Box P(x)$, quindi $M, w_1 \models \exists x \Box P(x)$. Ma $M, w_2 \models \exists x P(x)$ è vera (solo a esiste e soddisfa P). Quindi $M, w_1 \models \Box \exists x P(x)$. Questo non è un controesempio.

Il controesempio corretto: $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_2)\}$, $D(w_1) = \{a\}$, $D(w_2) = \emptyset$. Definiamo $I_{w_1}(P) = \{a\}$. Allora $M, w_1, \sigma[x \mapsto a] \models \Box P(x)$ vacuamente (non ci sono individui in w_2), quindi $M, w_1 \models \exists x \Box P(x)$. Ma $M, w_2 \not\models \exists x P(x)$ (poiché $D(w_2) = \emptyset$), quindi $M, w_1 \not\models \Box \exists x P(x)$. ■

3.4 Identità Trans-Mondiale e Rigidità

Definizione 3.4.1 (Designatore Rigido):

Un termine t è un designatore rigido in un modello M se per ogni coppia di mondi $w, w' \in W$ e ogni assegnazione σ :

- Se $\llbracket t \rrbracket_{\sigma} \{M, w, \sigma\}$ è definito e $\llbracket t \rrbracket_{\sigma} \{M, w', \sigma\}$ è definito, allora $\llbracket t \rrbracket_{\sigma} \{M, w, \sigma\} = \llbracket t \rrbracket_{\sigma} \{M, w', \sigma\}$

In altre parole, t denota lo stesso individuo in tutti i mondi in cui denota qualcosa.

Definizione 3.4.2 (Funzione di Designazione Mondiale):

Per modellare designatori non rigidi, possiamo usare descrizioni definite. Una descrizione definita $\iota x \phi(x)$ (letta "l'unico x tale che $\phi(x)$ ") è interpretata come:

- $\llbracket \iota x \phi(x) \rrbracket_{\{M, w, \sigma\}} = d$ se esiste un unico $d \in D(w)$ con $M, w, \sigma[x \mapsto d] \models \phi(x)$
- Altrimenti non è definita

La descrizione $\iota x \phi(x)$ è tipicamente un designatore non rigido: può denotare individui diversi in mondi diversi.

Teorema 3.4.3 (Necessità dell'Identità):

Per ogni modello M con identità e ogni assegnazione σ :

Se $M, w, \sigma \models t_1 = t_2$, allora $M, w, \sigma \models \Box(t_1 = t_2)$

Dimostrazione:

Assumiamo che t_1 e t_2 siano designatori rigidi (tipicamente costanti o nomi propri nella semantica kripkeana). Supponiamo $M, w, \sigma \models t_1 = t_2$, cioè $\llbracket t_1 \rrbracket_{\{M, w, \sigma\}} = \llbracket t_2 \rrbracket_{\{M, w, \sigma\}} = d$ per qualche $d \in D(w)$. Sia w' un mondo arbitrario con wRw' . Poiché t_1 e t_2 sono rigidi, se sono definiti in w' , allora $\llbracket t_1 \rrbracket_{\{M, w', \sigma\}} = d = \llbracket t_2 \rrbracket_{\{M, w', \sigma\}}$. Quindi $M, w', \sigma \models t_1 = t_2$. Da cui $M, w, \sigma \models \Box(t_1 = t_2)$. ■

Corollario 3.4.4:

La formula $a = b \rightarrow \Box(a = b)$ è valida per costanti rigide a, b .

3.5 Contropartismo vs. Realismo Trans-Mondiale

Il contropartismo di David Lewis offre un'alternativa alla semantica trans-mondiale standard. In questa semantica, gli individui esistono in un solo mondo, e gli enunciati modali de re sono interpretati tramite relazioni di controparte.

Definizione 3.5.1 (Modello Contropartista):

Un modello contropartista è $M = \langle W, R, \{D_w\}_{w \in W}, C, I \rangle$ dove:

- W, R, D_w, I sono come prima, ma con $D_w \cap D_{w'} = \emptyset$ per $w \neq w'$
- $C \subseteq (\bigcup_{w \in W} D_w) \times (\bigcup_{w \in W} D_w)$ è la relazione di controparte

La relazione C soddisfa:

1. Se $C(x, y)$ allora esistono w, w' con $x \in D_w$ e $y \in D_{w'}$
2. Per ogni x , $C(x, x)$ (ogni individuo è controparte di se stesso)
3. C non è necessariamente simmetrica o transitiva

Definizione 3.5.2 (Semantica Contropartista):

La clausola per $\Box$ diventa:

- $M, w, \sigma \models \Box\phi(x)$ se e solo se per ogni w' con wRw' e ogni $y \in D_{w'}$ con $C(\sigma(x), y)$, si ha $M, w', \sigma[x \mapsto y] \models \phi(x)$

In questa semantica, "Aristotele avrebbe potuto essere un pescatore" è vero se qualche controparte di Aristotele in qualche mondo accessibile è un pescatore.

Proposizione 3.5.3:

Nella semantica contropartista, la necessità dell'identità può fallire. Possiamo avere $M, w, \sigma \models a = b$ ma $M, w, \sigma \not\models \Box(a = b)$ se a e b hanno controparti diverse in mondi accessibili.

4.1 Logica Temporale: Strutture Temporalì

Una struttura temporale è una coppia $T = \langle T, < \rangle$ dove T è un insieme di istanti temporali e $<$ è una relazione di precedenza temporale che è:

- Irreflessiva: $\forall t \neg(t < t)$
- Transitiva: $\forall t \forall t' \forall t'' ((t < t' \wedge t' < t'') \rightarrow t < t'')$

Un modello temporale è $M = \langle T, <, V \rangle$ dove $V: \text{PROP} \rightarrow P(T)$.

Definizione 4.1.1 (Operatori Temporalì):

Il linguaggio della logica temporale include gli operatori:

- F (futuro): $F\phi$ significa " ϕ sarà vera in qualche momento futuro"
- P (passato): $P\phi$ significa " ϕ era vera in qualche momento passato"
- G (sempre nel futuro): $G\phi$ significa " ϕ sarà sempre vera"
- H (sempre nel passato): $H\phi$ significa " ϕ è sempre stata vera"
- X (prossimo): $X\phi$ significa " ϕ sarà vera al prossimo istante" (solo per tempo discreto)
- U (fino a): $\phi U \psi$ significa " ϕ sarà vera fino a quando ψ diventa vera"

Definizione 4.1.2 (Semantica):

- $M, t \models F\phi$ se e solo se esiste t' con $t < t'$ e $M, t' \models \phi$
- $M, t \models P\phi$ se e solo se esiste t' con $t' < t$ e $M, t' \models \phi$
- $M, t \models G\phi$ se e solo se per ogni t' con $t < t'$, $M, t' \models \phi$
- $M, t \models H\phi$ se e solo se per ogni t' con $t' < t$, $M, t' \models \phi$
- $M, t \models \phi U \psi$ se e solo se esiste t' con $t < t'$, $M, t' \models \psi$, e per ogni t'' con $t < t'' < t'$, $M, t'' \models \phi$

Teorema 4.1.3 (Dualità):

- $F\phi \equiv \neg G\neg\phi$
- $P\phi \equiv \neg H\neg\phi$
- $G\phi \equiv \neg F\neg\phi$
- $H\phi \equiv \neg P\neg\phi$

Teorema 4.1.4 (Validità su Strutture Lineari):

Se $<$ è una relazione di ordine totale (lineare), allora sono valide:

- $G\phi \rightarrow GG\phi$ (transitività del futuro)
- $\phi \wedge G\phi \rightarrow \phi U \psi \leftrightarrow F\psi$ (until è equivalente a eventualmente, se ϕ è sempre vera)

4.2 Logica Epistemica Multi-Agente

Un modello epistemic multi-agente per n agenti è $M = \langle W, R_1, \dots, R_n, V \rangle$ dove $R_i \subseteq W \times W$ è la relazione di indistinguibilità epistemica per l'agente i .

Definizione 4.2.1 (Operatori Epistemic):

- $K_i \phi$: "l'agente i sa che ϕ "
- $C_G \phi$: " ϕ è conoscenza comune nel gruppo G "
- $E_G \phi$: "tutti in G sanno ϕ " (conoscenza di tutti)
- $D_G \phi$: " ϕ è conoscenza distribuita in G "

Definizione 4.2.2 (Semantica):

- $M, w \models K_i \phi$ se e solo se per ogni w' con $wR_i w'$, $M, w' \models \phi$
- $M, w \models E_G \phi$ se e solo se per ogni $i \in G$, $M, w \models K_i \phi$
- $M, w \models D_G \phi$ se e solo se per ogni w' con $wR_G w'$, $M, w' \models \phi$, dove $wR_G w' \Leftrightarrow$ per ogni $i \in G$, $wR_i w'$

Per la conoscenza comune, definiamo R_G come la chiusura transitiva di $\bigcup_{i \in G} R_i$:

- $M, w \models C_G \phi$ se e solo se per ogni w' con $wR_G w'$, $M, w' \models \phi$

Teorema 4.2.3 (Assiomi della Conoscenza):

Se R_i è una relazione di equivalenza, sono validi:

- $K_i \phi \rightarrow \phi$ (fattività della conoscenza)
- $K_i \phi \rightarrow K_i K_i \phi$ (introspezione positiva)
- $\neg K_i \phi \rightarrow K_i \neg K_i \phi$ (introspezione negativa)
- $K_i(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i \phi \rightarrow K_i \psi)$ (chiusura logica)

Teorema 4.2.4 (Punto Fisso della Conoscenza Comune):

$$C_G \phi \equiv E_G(\phi \wedge C_G \phi)$$

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Supponiamo $M, w \models C_G \phi$. Allora per ogni w' con $wR_G w'$, $M, w' \models \phi$. In particolare:

- Per ogni $i \in G$ e w' con $wR_i w'$, $M, w' \models \phi$ (quindi $M, w \models K_i \phi$ per ogni $i \in G$)
- Per ogni $i \in G$ e w' con $wR_i w'$, abbiamo anche che per ogni w'' con $w'R_G w''$, $M, w'' \models \phi$ (quindi $M, w' \models C_G \phi$)

Quindi $M, w \models E_G(\phi \wedge C_G \phi)$.

($\Leftarrow$) Supponiamo $M, w \models E_G(\phi \wedge C_G \phi)$. Dobbiamo mostrare che per ogni w' con $wR_G w'$, $M, w' \models \phi$. Procediamo per induzione sulla lunghezza n del percorso da w a w' . Base ($n=0$): $w' = w$. Per qualche $i \in G$, $M, w \models K_i \phi$, quindi $M, w \models \phi$. Passo induttivo: se il percorso ha lunghezza $n+1$, esiste w'' con $wR_G w''$ (percorso di lunghezza n) e $w''R_i w'$ per qualche i . Per IH, $M, w'' \models \phi$. Inoltre, $M, w'' \models C_G \phi$ (usando l'ipotesi induttiva sulla componente C_G), quindi $M, w'' \models K_i \phi$, da cui $M, w' \models \phi$. ■

4.3 Logica Deontica: Sistemi Normativi

Un modello deontico è $M = \langle W, R, V \rangle$ dove wRw' significa che w' è un mondo deonticamente ideale o permissibile rispetto a w .

Definizione 4.3.1 (Operatori Deontici):

- $O\phi$: "è obbligatorio che ϕ "
- $P\phi$: "è permesso che ϕ "
- $F\phi$: "è proibito che ϕ "

Definizione 4.3.2 (Semantica Standard SDL):

- $M, w \models O\phi$ se e solo se per ogni w' con wRw' , $M, w' \models \phi$
- $M, w \models P\phi$ se e solo se esiste w' con wRw' e $M, w' \models \phi$
- $F\phi \equiv O\neg\phi \equiv \neg P\phi$

Teorema 4.3.3 (Principi della Logica Deontica):

Se R è seriale ($\forall w \exists w'(wRw')$), sono validi:

- $O\phi \rightarrow P\phi$ (ciò che è obbligatorio è permesso)
- $O(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (O\phi \wedge O\psi)$ (distribuzione sulle congiunzioni)
- OT (tautologia obbligatoria)

Problema 4.3.4 (Paradosso della Deroga):

Consideriamo:

1. $O(\neg \text{ruba})$ (è obbligatorio non rubare)
2. ruba (di fatto, rubo)
3. $\text{ruba} \rightarrow O(\text{restituisce})$ (se rubi, è obbligatorio restituire)

Dalla semantica standard: se esiste w' accessibile dove $\neg \text{ruba}$, allora in w' potrebbe non valere l'obbligo di restituire. Il paradosso emerge nel trattare obblighi contrari al dovere.

Soluzione 4.3.5 (Logica Deontica Dinamica):

Introduciamo una gerarchia di mondi deontici: R_{primario} (obblighi primari) e $R_{\text{secondario}}$ (obblighi che si applicano quando i primari sono violati).

4.4 Logica Dinamica Proposizionale (PDL)

Il linguaggio di PDL include programmi $\alpha, \beta, \dots$ costruiti da azioni atomiche mediante operatori:

- $\alpha; \beta$ (composizione sequenziale)
- $\alpha \cup \beta$ (scelta non deterministica)
- α (iterazione)
- $\phi?$ (test)

Definizione 4.4.1 (Modello PDL):

$M = \langle W, \{R_a\}_{a \in \text{ACT}}, V \rangle$ dove ACT è l'insieme delle azioni atomiche e $R_a \subseteq W \times W$ per ogni $a \in \text{ACT}$.

Definizione 4.4.2 (Interpretazione dei Programmi):

La relazione $R_\alpha \subseteq W \times W$ per un programma α è definita:

- $R_{\{\alpha; \beta\}} = R_\alpha \circ R_\beta = \{(w, w'') : \exists w' (w R_\alpha w' \wedge w' R_\beta w'')\}$
- $R_{\{\alpha \cup \beta\}} = R_\alpha \cup R_\beta$
- $R_{\{\alpha\}} = (R_\alpha)^+$ (chiusura riflessiva e transitiva)
- $R_{\{\phi?\}} = \{(w, w) : M, w \models \phi\}$

Definizione 4.4.3 (Semantica delle Formule):

- $M, w \models [\alpha]\phi$ se e solo se per ogni w' con $w R_\alpha w'$, $M, w' \models \phi$
- $M, w \models \langle \alpha \rangle \phi$ se e solo se esiste w' con $w R_\alpha w'$ e $M, w' \models \phi$

Teorema 4.4.4 (Validità PDL):

Sono valide:

- $[\alpha; \beta]\phi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\phi$
- $[\alpha \cup \beta]\phi \leftrightarrow [\alpha]\phi \wedge [\beta]\phi$
- $[\alpha]\phi \leftrightarrow \phi \wedge [\alpha][\alpha]\phi$
- $[\phi?]\psi \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi)$

Teorema 4.4.5 (Regola di Induzione per α):

Se $\vdash \phi \rightarrow [\alpha]\phi$, allora $\vdash \phi \rightarrow [\alpha]\phi$

Dimostrazione (schema):

Se ϕ è un invariante per α (cioè $\phi \rightarrow [\alpha]\phi$), allora ϕ è preservata da ogni esecuzione finita di α , quindi da α . ■

4.5 Logica Epistemica Dinamica (DEL)

DEL estende la logica epistemica con operatori per azioni epistemiche che cambiano la conoscenza degli agenti.

Definizione 4.5.1 (Modello Eventi):

Un modello eventi è $E = \langle E, \{\sim_i\}_{i \in AGT}, PRE \rangle$ dove:

- E è un insieme di eventi possibili
- $\sim_i \subseteq E \times E$ è l'indistinguibilità epistemica dell'agente i sugli eventi
- $PRE: E \rightarrow FORM$ assegna una preconditione a ogni evento

Definizione 4.5.2 (Aggiornamento del Modello):

Dato un modello $M = \langle W, \{R_i\}_{i \in AGT}, V \rangle$ e un modello eventi E , il modello aggiornato $M \otimes E = \langle W', \{R'_i\}_{i \in AGT}, V' \rangle$ è definito:

- $W' = \{(w, e) \in W \times E : M, w \models PRE(e)\}$
- $(w, e) R'_i (w', e')$ se e solo se $w R_i w'$ e $e \sim_i e'$
- $V'(p) = \{(w, e) \in W' : w \in V(p)\}$

Definizione 4.5.3 (Operatore di Aggiornamento):

Per un modello eventi E , definiamo l'operatore $[E, e]$:

- $M, w \models [E, e]\phi$ se e solo se $M, w \models PRE(e)$ implica $M \otimes E, (w, e) \models \phi$

Teorema 4.5.4 (Riduzione dell'Annuncio Pubblico):

Per un annuncio pubblico $!\phi$ (dove ogni agente apprende ϕ):

- $![\phi]p \leftrightarrow (\phi \rightarrow p)$
- $![\phi]\neg\psi \leftrightarrow (\phi \rightarrow \neg![\phi]\psi)$
- $![\phi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\phi]\psi \wedge [\phi]\chi)$
- $![\phi]K_i \psi \leftrightarrow (\phi \rightarrow K_i![\phi]\psi)$

5.1 Algebre Booleane con Operatori

Definizione 5.1.1 (Algebra Modale):

Un'algebra modale è una struttura $A = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0, 1 \rangle$ dove:

- $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ è un'algebra booleana
- $\Box: A \rightarrow A$ è un operatore unario che soddisfa:
 - $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$
 - $\Box 1 = 1$

L'operatore $\Diamond$ è definito come $\Diamond a = \neg\Box\neg a$.

Definizione 5.1.2 (Omomorfismo di Algebre Modali):

Un omomorfismo tra algebre modali A_1 e A_2 è una funzione $h: A_1 \rightarrow A_2$ tale che:

- h preserva le operazioni booleane: $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$, $h(\neg a) = \neg h(a)$, etc.
- h commuta con $\Box$: $h(\Box a) = \Box h(a)$

5.2 Algebra Complessa di un Frame

Definizione 5.2.1 (Algebra Complessa):

Dato un frame $F = \langle W, R \rangle$, la sua algebra complessa è $F^{\wedge+} = \langle P(W), \cap, \cup, -, \Box^{\wedge+}, \emptyset, W \rangle$ dove:

- $\Box^{\wedge+}(X) = \{w \in W : \forall w' (wRw' \rightarrow w' \in X)\}$ per $X \subseteq W$

Proposizione 5.2.2:

$F^{\wedge+}$ è un'algebra modale.

Dimostrazione:

Dobbiamo verificare che $\Box^{\wedge+}$ soddisfa gli assiomi:

- $\Box^{\wedge+}(X \cap Y) = \{w : \forall w' (wRw' \rightarrow w' \in X \cap Y)\} = \{w : \forall w' (wRw' \rightarrow (w' \in X \wedge w' \in Y))\} = \{w : \forall w' (wRw' \rightarrow w' \in X)\} \cap \{w : \forall w' (wRw' \rightarrow w' \in Y)\} = \Box^{\wedge+}(X) \cap \Box^{\wedge+}(Y)$
- $\Box^{\wedge+}(W) = \{w : \forall w' (wRw' \rightarrow w' \in W)\} = W$ ■

5.3 Frame Duale di un'Algebra

Definizione 5.3.1 (Ultrafiltro):

Un ultrafiltro su un'algebra booleana B è un sottoinsieme proprio $U \subset B$ tale che:

1. $1 \in U$ e $0 \notin U$
2. Se $a, b \in U$ allora $a \wedge b \in U$
3. Se $a \in U$ e $a \leq b$ allora $b \in U$
4. Per ogni $a \in B$, si ha $a \in U$ oppure $\neg a \in U$

Definizione 5.3.2 (Frame Duale):

Dato un'algebra modale A , il suo frame duale è $A^{\wedge+} = \langle W^{\wedge+}, R^{\wedge+} \rangle$ dove:

- $W^{\wedge+} = \{U : U \text{ è un ultrafiltro di } A\}$
- $UR^{\wedge+}V$ se e solo se $\{a : \Box a \in U\} \subseteq V$

Teorema 5.3.3 (Dualità di Jónsson-Tarski):

Per ogni algebra modale A , esiste un omomorfismo iniettivo $h: A \rightarrow (A^{\wedge+})^{\wedge+}$ definito da $h(a) = \{U \in W^{\wedge+} : a \in U\}$.

Dimostrazione (schema):

Si verifica che:

1. h è un omomorfismo di algebre modali
2. h è iniettivo
3. h commuta con $\Box$: $h(\Box a) = \Box^{\wedge+}(h(a))$

Il punto critico è mostrare che $U \in \Box^+(h(a))$ se e solo se $\Box a \in U$. ■

5.4 Teoremi di Corrispondenza Avanzati

Teorema 5.4.1 (Metodo di Sahlqvist):

Una formula è una formula di Sahlqvist se ha una forma sintattica specifica che garantisce la corrispondenza con una condizione del primo ordine sul frame.

Le formule di Sahlqvist hanno la forma $\forall p_1 \dots \forall p_n (A \rightarrow B)$ dove A è positiva (variabili solo in scope positivo) e B è negativa (variabili solo in scope negativo dopo normalizzazione).

Esempi di Formule di Sahlqvist:

- $\Box p \rightarrow p$ (corrisponde a riflessività)
- $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ (corrisponde a transitività)
- $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ (corrisponde a simmetria)

Teorema 5.4.2 (Completezza per Formule di Sahlqvist):

Ogni formula di Sahlqvist definisce una classe di frame elementare (definibile nel primo ordine), e il sistema modale normale più piccolo che la contiene è completo rispetto a quella classe.

5.5 Bisimulazione e Invarianza Modale

Definizione 5.5.1 (Bisimulazione):

Una bisimulazione tra modelli $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ e $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ è una relazione $Z \subseteq W_1 \times W_2$ tale che per ogni $(w_1, w_2) \in Z$:

1. Atoms: Per ogni $p \in \text{PROP}$, $w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)$
2. Forth: Se $w_1 R_1 w'_1$, allora esiste w'_2 con $w_2 R_2 w'_2$ e $(w'_1, w'_2) \in Z$
3. Back: Se $w_2 R_2 w'_2$, allora esiste w'_1 con $w_1 R_1 w'_1$ e $(w'_1, w'_2) \in Z$

Scriviamo $M_1, w_1 \leftrightarrow M_2, w_2$ se esiste una bisimulazione Z con $(w_1, w_2) \in Z$.

Teorema 5.5.2 (Invarianza per Bisimulazione):

Se $M_1, w_1 \leftrightarrow M_2, w_2$, allora per ogni formula modale ϕ :

$$M_1, w_1 \models \phi \Leftrightarrow M_2, w_2 \models \phi$$

Dimostrazione (per induzione sulla complessità di ϕ):

Caso base ($\phi = p$): Segue dalla condizione Atoms della bisimulazione.

Caso induttivo ($\phi = \neg\psi$):

$M_1, w_1 \models \neg\psi \Leftrightarrow M_1, w_1 \not\models \psi \Leftrightarrow (\text{per IH}) M_2, w_2 \not\models \psi \Leftrightarrow M_2, w_2 \models \neg\psi$

Caso induttivo ($\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$): Segue direttamente dall'IH.

Caso induttivo ($\phi = \Box\psi$):

($\Rightarrow$) Supponiamo $M_1, w_1 \models \Box\psi$. Sia w'_2 con $w_2 R_2 w'_2$. Per la condizione Back, esiste w'_1 con $w_1 R_1 w'_1$ e $(w'_1, w'_2) \in Z$. Poiché $M_1, w_1 \models \Box\psi$, abbiamo $M_1, w'_1 \models \psi$. Per IH, $M_2, w'_2 \models \psi$. Quindi $M_2, w_2 \models \Box\psi$.

($\Leftarrow$) Simmetrico, usando la condizione Forth. ■

Teorema 5.5.3 (Caratterizzazione di Van Benthem):

Una proprietà di modelli puntati (M, w) è definibile nella logica modale se e solo se è:

1. Definibile nella logica del primo ordine
2. Invariante per bisimulazione

Corollario 5.5.4:

La logica modale non può esprimere:

- "Il mondo w ha esattamente n successori" per $n \geq 2$
- "Il frame è finito"
- "Il frame è ben fondato"
- Proprietà che distinguono tra strutture bisimili

6.1 Decidibilità e Indecidibilità

Teorema 6.1.1 (Decidibilità di K):

Il problema della soddisfacibilità per la logica K è decidibile e PSPACE-completo.

Dimostrazione (schema):

PSPACE-hardness: Riducendo il problema QBF (Quantified Boolean Formulae).

PSPACE-membership: Algoritmo non deterministico con spazio polinomiale:

1. Dato ϕ , costruisci un tableaux
2. Ogni ramo ha lunghezza al più $|\phi| \cdot 2^{|\phi|}$
3. Possiamo verificare ogni ramo in spazio polinomiale
4. Per il teorema di Savitch, NPSPACE = PSPACE ■

Teorema 6.1.2 (Decidibilità di S5):

Il problema della soddisfacibilità per S5 è NP-completo.

Dimostrazione:

In S5, tutti i mondi sono accessibili tra loro, quindi possiamo tradurre ogni formula modale in una formula booleana equivalente. La traduzione è:

- $\Box\phi$ viene rimpiazzato da ϕ (poiché se ϕ è vera in tutti i mondi accessibili ed tutti i mondi sono accessibili, ϕ deve essere vera ovunque)

La verifica richiede solo ricerca SAT, quindi NP-completo. ■

Teorema 6.1.3 (Indecidibilità della Logica Modale del Primo Ordine):

La logica modale del primo ordine con domini variabili è indecidibile.

Dimostrazione (schema):

Si riduce il problema della validità nella logica del primo ordine, che è indecidibile per il teorema di Church. ■

6.2 Algoritmi di Tableaux

Definizione 6.2.1 (Tableaux Modale):

Un tableaux per una formula ϕ è un albero dove:

- La radice è etichettata con $\{\phi\}$
- I nodi sono etichettati con insiemi di formule (rappresentanti mondi potenziali)
- Le regole di espansione decompongono formule complesse

Regole di Tableaux per K:

Regole α (coniunzioni):

...

$$\frac{\{\phi \wedge \psi, \Gamma\}}{\{\phi, \psi, \Gamma\}}$$

...

Regole β (disgiunzioni):

...

$$\frac{\{\phi \vee \psi, \Gamma\}}{\{\phi, \Gamma\} \mid \{\psi, \Gamma\}}$$

...

Regola π (modalità):

```

...
{ $\Box\phi_1, \dots, \Box\phi_n, \Diamond\psi, \Gamma$ }
-----
nuovo nodo
{ $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ }
...

```

Definizione 6.2.2 (Chiusura di un Ramo):

Un ramo è chiuso se contiene sia ϕ che $\neg\phi$ per qualche formula ϕ .

Teorema 6.2.3 (Correttezza e Completezza del Tableaux):

Una formula ϕ è soddisfacibile in K se e solo se esiste un tableaux completo per ϕ con almeno un ramo aperto.

6.3 Model Checking

Definizione 6.3.1 (Problema del Model Checking):

INPUT: Un modello finito $M = \langle W, R, V \rangle$, un mondo $w \in W$, una formula ϕ

OUTPUT: $M, w \models \phi$?

Teorema 6.3.2 (Complessità del Model Checking):

Il model checking per la logica modale è risolvibile in tempo P (polinomiale in $|M| + |\phi|$).

Algoritmo 6.3.3 (Model Checking Ricorsivo):

```

...
```

```
function CHECK(M, w,  $\phi$ ):
```

```
  if  $\phi = p$ :
```

```
    return  $w \in V(p)$ 
```

```
  if  $\phi = \neg\psi$ :
```

```
    return  $\neg\text{CHECK}(M, w, \psi)$ 
```

```
  if  $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ :
```

```
    return  $\text{CHECK}(M, w, \psi_1) \wedge \text{CHECK}(M, w, \psi_2)$ 
```

```
  if  $\phi = \Box\psi$ :
```

```
    for all  $w'$  with  $wRw'$ :
```

```
      if  $\neg\text{CHECK}(M, w', \psi)$ :
```

```
        return false
```

```
    return true
```

```

...
```

Analisi di Complessità:

- Ogni sottoformula viene valutata al più $|W|$ volte

- Numero di sottoformule: $O(|\phi|)$
- Tempo totale: $O(|W| \cdot |R| \cdot |\phi|)$

6.4 Filtrazione e Modelli Finiti

Teorema 6.4.1 (Filtrazione Generale):

Sia $M = \langle W, R, V \rangle$ un modello e Φ un insieme finito di formule chiuso sotto sottoformule. Definiamo:

- $w \equiv_{\Phi} w' \Leftrightarrow$ per ogni $\phi \in \Phi$, $(M, w \models \phi \Leftrightarrow M, w' \models \phi)$
- $W^{\Phi} = \{[w]_{\Phi} : w \in W\}$
- $[w]_{\Phi} R^{\Phi} [w']_{\Phi} \Leftrightarrow \exists u \in [w]_{\Phi}, \exists u' \in [w']_{\Phi} (uRu')$
- $[w]_{\Phi} R^{\Phi}_{\max} [w']_{\Phi} \Leftrightarrow \forall u \in [w]_{\Phi}, \forall u' \in [w']_{\Phi} (uRu')$
- $V^{\Phi}(p) = \{[w]_{\Phi} : M, w \models p\}$ per $p \in \Phi$

Allora $M^{\Phi} = \langle W^{\Phi}, R^{\Phi}, V^{\Phi} \rangle$ soddisfa:

1. $|W^{\Phi}| \leq 2^{|\Phi|}$
2. Per ogni $\phi \in \Phi$ e $w \in W$: $M, w \models \phi \Leftrightarrow M^{\Phi}, [w]_{\Phi} \models \phi$

Corollario 6.4.2 (FMP per K, T, S4, S5):

I sistemi K, T, S4, S5 hanno la proprietà del modello finito.

Dimostrazione:

Per ogni formula ϕ , sia Φ l'insieme delle sue sottoformule. Se ϕ è soddisfacibile, costruiamo il modello canonico e applichiamo la filtrazione. Il modello risultante è finito (dimensione $\leq 2^{|\phi|}$) e soddisfa ϕ . ■

7.1 Logica Modale Intuizionista

Definizione 7.1.1 (Frame Intuizionista):

Un frame intuizionista è $F = \langle W, \leq, R \rangle$ dove:

- $\langle W, \leq \rangle$ è un ordine parziale (riflessivo, transitivo, antisimmetrico)
- $R \subseteq W \times W$ è la relazione di accessibilità modale
- R è persistente rispetto a $\leq$: se $w \leq w'$ e wRu allora esiste u' con $w'Ru'$ e $u \leq u'$

Definizione 7.1.2 (Semantica Intuizionista):

La relazione di soddisfacimento è definita con una condizione di monotonia:

- Se $M, w \models \phi$ e $w \leq w'$, allora $M, w' \models \phi$ (per formule atomiche)

Le clausole per i connettivi:

- $M, w \models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow M, w \models \phi$ e $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \vee \psi \Leftrightarrow M, w \models \phi$ oppure $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \rightarrow \psi \Leftrightarrow$ per ogni $w' \geq w$, $(M, w' \models \phi \text{ implica } M, w' \models \psi)$

- $M, w \models \neg\phi \Leftrightarrow$ per ogni $w' \geq w$, $M, w' \not\models \phi$
- $M, w \models \Box\phi \Leftrightarrow$ per ogni w' con wRw' , $M, w' \models \phi$

Teorema 7.1.3 (Fallimento del Terzo Escluso):

La formula $p \vee \neg p$ non è valida nella logica intuizionista.

Controesempio:

Sia $W = \{w_1, w_2\}$ con $w_1 \leq w_2$, $V(p) = \{w_2\}$. Allora:

- $M, w_1 \not\models p$ (poiché $w_1 \notin V(p)$)
- $M, w_1 \not\models \neg p$ (poiché $M, w_2 \models p$ e $w_1 \leq w_2$)
- Quindi $M, w_1 \not\models p \vee \neg p$

7.2 Traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski

Definizione 7.2.1 (Traduzione τ):

La traduzione τ dalla logica intuizionista alla logica modale S4 è definita induttivamente:

- $\tau(p) = \Box p$ per p atomico
- $\tau(\phi \wedge \psi) = \tau(\phi) \wedge \tau(\psi)$
- $\tau(\phi \vee \psi) = \tau(\phi) \vee \tau(\psi)$
- $\tau(\phi \rightarrow \psi) = \Box(\tau(\phi) \rightarrow \tau(\psi))$
- $\tau(\neg\phi) = \Box\neg\tau(\phi)$

Teorema 7.2.2 (Correttezza della Traduzione):

Una formula ϕ è valida nella logica intuizionista se e solo se $\tau(\phi)$ è valida in S4.

Dimostrazione (schema):

Si costruisce una corrispondenza tra frame intuizionisti e frame S4, mostrando che la validità è preservata dalla traduzione in entrambe le direzioni. ■

7.3 Logiche Modali Probabilistiche

Definizione 7.3.1 (Modello Probabilistico):

Un modello probabilistico è $M = \langle W, R, \{\mu_w\}_{w \in W}, V \rangle$ dove:

- μ_w è una misura di probabilità su $\{w' : wRw'\}$ per ogni $w \in W$
- $\mu_w: P(\{w' : wRw'\}) \rightarrow [0,1]$ soddisfa:
 - $\mu_w(\emptyset) = 0$
 - $\mu_w(\{w' : wRw'\}) = 1$
 - $\mu_w(A \cup B) = \mu_w(A) + \mu_w(B)$ se $A \cap B = \emptyset$

Definizione 7.3.2 (Operatori Probabilistici):

Per $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, definiamo:

- $P_{\geq r} \phi$: "la probabilità di ϕ è almeno r "

Semantica:

- $M, w \models P_{\geq r} \phi \Leftrightarrow \mu_w([\phi])_w \geq r$

dove $[\phi]_w = \{w' : wRw' \text{ e } M, w' \models \phi\}$

Teorema 7.3.3 (Validità degli Assiomi di Probabilità):

Sono valide:

- $P_{\geq 1} \phi \rightarrow \phi$ (se ϕ ha probabilità 1, è vera)
- $P_{\geq r} \phi \wedge P_{\geq s} \psi \rightarrow P_{\geq \min(r+s, 1)} (\phi \vee \psi)$
- $P_{\geq r} \phi \rightarrow P_{\geq s} \phi$ per $r \geq s$

7.4 Logiche Modali Fuzzy

Definizione 7.4.1 (Modello Fuzzy):

Un modello fuzzy è $M = \langle W, R, V \rangle$ dove:

- $R: W \times W \rightarrow [0,1]$ è una relazione di accessibilità fuzzy
- $V: \text{PROP} \times W \rightarrow [0,1]$ assegna gradi di verità

Definizione 7.4.2 (Semantica Łukasiewicz):

Il grado di verità $V_M(\phi, w)$ è definito:

- $V_M(p, w) = V(p, w)$
- $V_M(\neg\phi, w) = 1 - V_M(\phi, w)$
- $V_M(\phi \wedge \psi, w) = \min(V_M(\phi, w), V_M(\psi, w))$
- $V_M(\phi \vee \psi, w) = \max(V_M(\phi, w), V_M(\psi, w))$
- $V_M(\phi \rightarrow \psi, w) = \min(1, 1 - V_M(\phi, w) + V_M(\psi, w))$
- $V_M(\Box\phi, w) = \inf_{w' \in W} \max(1 - R(w, w'), V_M(\phi, w'))$

Teorema 7.4.3 (Continuità):

Gli operatori modali fuzzy sono continui rispetto alla topologia standard su $[0,1]^W$.

7.5 Logiche Modali con Quantificazione sui Mondi

Definizione 7.5.1 (Linguaggio Ibrido):

Il linguaggio ibrido estende la logica modale con:

- Nominali $i, j, k, \dots$ (variabili proposizionali che sono vere in esattamente un mondo)
- Operatore $@$: $@_i \phi$ significa " ϕ è vera nel mondo nominato i "
- Quantificatori sui nominali: $\forall i \phi, \exists i \phi$

Definizione 7.5.2 (Modello Ibrido):

Un modello ibrido è $M = \langle W, R, V, I \rangle$ dove:

- $I: \text{NOM} \rightarrow W$ assegna a ogni nominale un unico mondo

Semantica:

- $M, w, g \models i \Leftrightarrow w = g(i)$ (dove g assegna mondi ai nominali)
- $M, w, g \models @_i \phi \Leftrightarrow M, g(i), g \models \phi$
- $M, w, g \models \forall i \phi \Leftrightarrow$ per ogni $w' \in W$, $M, w, g[i \mapsto w'] \models \phi$

Teorema 7.5.3 (Potere Espressivo):

Le logiche ibride possono esprimere proprietà non esprimibili nella logica modale standard:

- "w è un mondo terminale": $@_i \forall j (\Diamond j \rightarrow j)$
- "R è transitiva": $@_i \forall j \forall k ((\Diamond j \wedge @_j \Diamond k) \rightarrow \Diamond k)$

8.1 Topologia e Logica Modale

Definizione 8.1.1 (Spazio Topologico come Frame):

Dato uno spazio topologico $\langle X, \tau \rangle$, definiamo il frame $F_\tau = \langle X, R_\tau \rangle$ dove:

- $x R_\tau y \Leftrightarrow$ per ogni aperto $U \in \tau$ con $x \in U$, si ha $y \in U$

In altre parole, y è nel cluster di x .

Definizione 8.1.2 (Interpretazione Topologica di $\Box$):

In uno spazio topologico, interpretiamo:

- $\Box \phi$ come " ϕ è vera nell'interno di $\{x : \phi \text{ è vera in } x\}$ "
- $\Diamond \phi$ come " ϕ è vera nella chiusura di $\{x : \phi \text{ è vera in } x\}$ "

Formalmente:

- $[[\Box \phi]] = \text{Int}([[\phi]])$
- $[[\Diamond \phi]] = \text{Cl}([[\phi]])$

dove Int e Cl denotano interno e chiusura topologica.

Teorema 8.1.3 (S4 e Spazi Topologici):

Una formula è valida in S4 se e solo se è valida in tutti gli spazi topologici sotto l'interpretazione topologica.

Dimostrazione (schema):

Si mostra che:

1. Ogni frame S4 può essere embedded in uno spazio topologico
2. La validità è preservata dall'embedding
3. Gli assiomi di S4 corrispondono agli assiomi topologici per Int ■

8.2 Teoria delle Categorie e Semantica Modale

Definizione 8.2.1 (Categoria dei Frame):

La categoria Frm ha:

- Oggetti: frame $F = \langle W, R \rangle$
- Morfismi: p-morfismi tra frame

Un p-morfismo (morfismo limitante) tra $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ e $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ è una funzione $f: W_1 \rightarrow W_2$ tale che:

1. Se $w_1 R_1 w'_1$, allora $f(w_1) R_2 f(w'_1)$ (forth)
2. Se $f(w_1) R_2 w_2$, esiste w'_1 con $w_1 R_1 w'_1$ e $f(w'_1) = w_2$ (back)

Teorema 8.2.2 (Invarianza per p-morfismi):

Se $f: F_1 \rightarrow F_2$ è un p-morfismo e ϕ è valida in F_2 , allora ϕ è valida in F_1 .

Definizione 8.2.3 (Funtore Complexo):

Esiste un funtore $(-)^{++} : \text{Frm} \rightarrow \text{Alg}$ dove:

- $F \mapsto F^{++}$ (algebra complessa)
- p-morfismo $f \mapsto f^{++}$ definito da $f^{++}(X) = \{w \in W_1 : f(w) \in X\}$

Teorema 8.2.4 (Aggiunzione):

Il funtore $(-)^{++} : \text{Frm} \rightarrow \text{Alg}$ ha un aggiunto destro $(-)^+ : \text{Alg} \rightarrow \text{Frm}$ (frame duale), formando un'aggiunzione:

$$\text{Frm}(F, A^{++}) \cong \text{Alg}(F^{++}, A)$$

8.3 Teoria dei Grafi e Relazioni di Accessibilità

Definizione 8.3.1 (Grafo Diretto come Frame):

Ogni grafo diretto $G = \langle V, E \rangle$ induce un frame $F_G = \langle V, E \rangle$.

Definizione 8.3.2 (Proprietà Grafiche):

Diverse proprietà grafiche corrispondono a formule modali:

- Aciclicità: Non esiste un ciclo $\Leftrightarrow \neg \Diamond \dots \Diamond p$ con p vera solo in un nodo
- Connessione: Il grafo è fortemente connesso $\Leftrightarrow$ validità di schemi appropriati in S5
- Tree-width: Limitata tree-width del grafo corrisponde a limitata complessità modale

Teorema 8.3.3 (Caratterizzazione degli Alberi):

Un frame $F = \langle W, R \rangle$ è un albero (con radice, nessun ciclo, ogni nodo ha al più un predecessore) se e solo se:

1. Esiste un unico w_0 con $\neg \exists w (w R w_0)$
2. Per ogni $w \neq w_0$, esiste unico w' con $w' R w$

3. R è transitiva e aciclica

8.4 Automi e Logica Modale

Definizione 8.4.1 (Automa Modale):

Un automa modale è $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ dove:

- Q è l'insieme degli stati
- Σ è l'alfabeto
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ è la funzione di transizione
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ sono gli stati finali

Teorema 8.4.2 (Corrispondenza Automi-Logica):

Ogni automa modale A può essere convertito in una formula modale ϕ_A tale che:

- A accetta una parola $w \iff$ esiste un modello M e mondo w con $M, w \models \phi_A$

Definizione 8.4.3 (μ -Calcolo Modale):

Il μ -calcolo estende la logica modale con operatori di punto fisso:

- $\mu X. \phi(X)$: il minimo punto fisso di ϕ
- $\nu X. \phi(X)$: il massimo punto fisso di ϕ

dove $\phi(X)$ è una formula con X che occorre solo positivamente.

Teorema 8.4.4 (Equivalenza con Automi su Alberi):

Il μ -calcolo modale e gli automi su alberi hanno lo stesso potere espressivo.

9.1 Interpolazione e Definibilità

Teorema 9.1.1 (Interpolazione di Craig per K):

Se $\models_K \phi \rightarrow \psi$, allora esiste una formula χ (l'interpolante) tale che:

1. $\models_K \phi \rightarrow \chi$
2. $\models_K \chi \rightarrow \psi$
3. Ogni variabile proposizionale in χ occorre sia in ϕ che in ψ

Dimostrazione (schema):

La dimostrazione procede per induzione sulla derivazione di $\phi \rightarrow \psi$, costruendo interpolanti per ogni passo della derivazione. ■

Teorema 9.1.2 (Definibilità di Beth per K):

Se per ogni modello M e $w \in W$, l'estensione di $V(p)$ è univocamente determinata dalle estensioni delle variabili in Γ , allora esiste una formula $\phi(q_1, \dots, q_n)$ tale che:

$$\models_K \Gamma \rightarrow (p \leftrightarrow \phi(q_1, \dots, q_n))$$

9.2 Frame-completezza e Canonicità

Definizione 9.2.1 (Frame-completezza):

Una logica L è frame-completa se esiste una classe C di frame tale che:

$$L = \{\phi : C \models \phi\}$$

Teorema 9.2.2 (Non tutte le logiche sono frame-complete):

Esistono logiche modali normali che non sono frame-complete.

Esempio (Logica di Fine):

La logica definita da:

$$- K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$$

non è frame-completa (dimostrato da Fine, 1974).

Definizione 9.2.3 (Formula Canonica):

Una formula ϕ è canonica se è valida nel modello canonico di ogni logica che la contiene.

Teorema 9.2.4 (Canonicità delle Formule di Sahlqvist):

Tutte le formule di Sahlqvist sono canoniche.

Corollario 9.2.5:

Ogni logica assiomatizzata da formule di Sahlqvist è frame-completa.

9.3 Indipendenza e Algebrizzazione

Definizione 9.3.1 (Indipendenza Algebrica):

Una logica modale L è algebrizzabile se esiste una corrispondenza biunivoca tra:

- Estensioni di L
- Varietà di algebre modali

Teorema 9.3.2 (Teorema di Blok-Pigozzi):

Ogni logica modale normale è algebrizzabile.

Dimostrazione (schema):

Si definisce l'equivalente algebrico di derivabilità e si mostra che preserva la struttura logica. ■

9.4 Uniform Interpolation

Teorema 9.4.1 (Uniform Interpolation per $S4$ e $S5$):

Le logiche $S4$ e $S5$ hanno la proprietà di uniform interpolation: per ogni formula ϕ e variabile p , esistono formule $\phi^{\exists p}$ e $\phi^{\forall p}$ tali che:

- $\phi \wedge \exists p$ non contiene p
- $\models \phi \rightarrow \phi \wedge \exists p$
- Per ogni ψ senza p : $(\models \phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\models \phi \wedge \exists p \rightarrow \psi)$

E analogamente per $\phi \wedge \forall p$.

Teorema 9.4.2:

K non ha uniform interpolation.

9.5 Limiti Espressivi

Teorema 9.5.1 (Inesprimibilità della Transitività Irriflessiva):

Non esiste una formula modale che è valida esattamente nei frame dove R è transitiva e irreflessiva.

Dimostrazione:

Si costruiscono due frame bisimili, uno transitivo-irriflessivo e uno no, dimostrando che nessuna formula modale può distinguerli. ■

Teorema 9.5.2 (Gerarchia di Van Benthem):

Esiste una gerarchia infinita di frammenti della logica del primo ordine definibili modalmente, ciascuno strettamente più espressivo del precedente.

10.1 Semantica Algebrica

Definizione 10.1.1 (Validità Algebrica):

Una formula ϕ è algebricamente valida in una classe C di algebre modali se per ogni $A \in C$ e ogni valutazione $v: \text{VAR} \rightarrow A$, si ha $[[\phi]]_v = 1$.

Teorema 10.1.2 (Equivalenza Semantica):

Per logiche normali:

- ϕ è valida nei frame di $C \Leftrightarrow \phi$ è algebricamente valida in $\{F^+ : F \in C\}$

10.2 Semantica di Neighborhood

Definizione 10.2.1 (Modello di Neighborhood):

Un modello di neighborhood è $M = \langle W, N, V \rangle$ dove:

- $N: W \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ assegna a ogni mondo una collezione di "neighborhoods"

Semantica:

- $M, w \models \Box \phi \Leftrightarrow [[\phi]] \in N(w)$

dove $[[\phi]] = \{w' \in W : M, w' \models \phi\}$

Teorema 10.2.2 (Caratterizzazione):

I modelli di neighborhood caratterizzano logiche modali monotone (che contengono la regola di monotonia ma non necessariamente la regola di necessitazione completa).

10.3 Semantica di Coalgebre

Definizione 10.3.1 (Coalgebra):

Una coalgebra per un funtore $F: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ è una coppia $\langle X, \alpha \rangle$ dove:

- X è un insieme (il "portatore")
- $\alpha: X \rightarrow F(X)$ è la "struttura di coalgebra"

Definizione 10.3.2 (Coalgebra Modale):

Un frame di Kripke $\langle W, R \rangle$ è una coalgebra per il funtore $P: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ con:

- $\alpha: W \rightarrow P(W)$
- $\alpha(w) = \{w' : wRw'\}$

Teorema 10.3.3 (Bisimulazione Coalgebrica):

La bisimulazione nella semantica kripkeana coincide con la bisimulazione coalgebrica per il funtore P .

10.4 Semantica Game-Theoretic

Definizione 10.4.1 (Evaluation Game):

Data una formula ϕ e un modello puntato (M, w) , definiamo un gioco tra due giocatori:

- Verifier (cerca di dimostrare $M, w \models \phi$)
- Falsifier (cerca di dimostrare $M, w \not\models \phi$)

Regole del Gioco:

- Per $\phi \wedge \psi$: Falsifier sceglie una congiunzione; il gioco continua su quella
- Per $\phi \vee \psi$: Verifier sceglie una disgiunzione; il gioco continua su quella
- Per $\Box\phi$: Falsifier sceglie w' con wRw' ; il gioco continua da (M, w') con ϕ
- Per $\Diamond\phi$: Verifier sceglie w' con wRw' ; il gioco continua da (M, w') con ϕ

Teorema 10.4.2 (Equivalenza):

$M, w \models \phi$ se e solo se Verifier ha una strategia vincente nel gioco su (M, w, ϕ) .

10.5 Semantica Multi-Valued

Definizione 10.5.1 (Logica a Tre Valori):

Consideriamo valori di verità $\{0, 1/2, 1\}$ rappresentanti {falso, indeterminato, vero}.

Tavole di Verità:

...

$$\neg 0 = 1, \neg 1/2 = 1/2, \neg 1 = 0$$

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

...

Semantica Modale a Tre Valori:

$$- V_M(\Box\phi, w) = \inf\{V_M(\phi, w') : wRw'\}$$

$$- V_M(\Diamond\phi, w) = \sup\{V_M(\phi, w') : wRw'\}$$

Teorema 10.5.2:

La semantica a tre valori può modellare informazione incompleta nei sistemi modali.

11.1 Formalizzazione dell'Essenzialismo

Definizione 11.1.1 (Proprietà Essenziale):

In un modello M, una proprietà P è essenziale per un oggetto a se:

$$- M \models \forall w((E(a, w) \rightarrow P(a, w)))$$

dove $E(a, w)$ significa "a esiste nel mondo w".

Assiomi dell'Essenzialismo:

$$1. \text{ Origine Essenziale: } \forall x \forall y (\text{Origin}(x, y) \rightarrow \Box(E(x) \rightarrow \text{Origin}(x, y)))$$

$$2. \text{ Costituzione Essenziale: } \forall x \forall y (\text{MadeOf}(x, y) \rightarrow \Box(E(x) \rightarrow \text{MadeOf}(x, y)))$$

11.2 Identità Trans-Temporale

Definizione 11.2.1 (Modello Temporale con Persistenza):

$M = \langle T, <, D, I, P \rangle$ dove $P \subseteq (U_{\{t \in T\}} D_t) \times (U_{\{t \in T\}} D_t)$ è la relazione di persistenza: $P(x, y)$ significa che x a un tempo e y a un altro sono stadi dello stesso oggetto persistente.

Teorema 11.2.2 (Endurantismo vs Perdurantismo):

$$- \text{Endurantismo: } \forall x \forall t_1 \forall t_2 (P(x@t_1, x@t_2) \Leftrightarrow x@t_1 = x@t_2)$$

- Perdurantismo: Gli oggetti sono aggregati 4D di stadi temporali

11.3 Modalità de re Formalizzata

Definizione 11.3.1 (Attribuzione de re):

Per un termine t e proprietà P:

$$- \text{de dicto: } \Box \forall x (t = x \rightarrow P(x))$$

- de re: $\forall x(t = x \rightarrow \Box P(x))$

Teorema 11.3.2 (Non-Equivalenza):

In modelli con quantificazione non rigida:

$\not\models \Box \forall x(t = x \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \forall x(t = x \rightarrow \Box P(x))$

11.4 Controfattuali e Similarity

Definizione 11.4.1 (Sfere di Similarity):

Un sistema di sfere per w è una famiglia $\{S_w\}_i$ di insiemi di mondi tale che:

1. $S_{w,0} = \{w\}$
2. $S_{w,i} \subseteq S_{w,j}$ per $i < j$
3. $\bigcup_i S_{w,i} = W$

Semantica di Lewis-Stalnaker:

- $M, w \models \Box \rightarrow \psi \iff$ o (i) nessun mondo in alcuna sfera soddisfa ϕ , oppure (ii) la sfera più piccola contenente un mondo ϕ contiene un mondo $\phi \wedge \psi$

Teorema 11.4.2 (Assiomi dei Controfattuali):

Sono validi:

- $(\Box \rightarrow \psi) \wedge (\Box \rightarrow \chi) \rightarrow (\Box \rightarrow (\psi \wedge \chi))$
- $(\Box \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\Box \vee \psi) \rightarrow \chi)$

11.5 Quantificazione Attualista

Definizione 11.5.1 (Quantificatore Attualista):

- $M, w \models \forall^A x \phi(x) \iff$ per ogni $d \in D(w_{\text{actual}})$, $M, w \models \phi(d)$

dove w_{actual} è il mondo attuale distinto.

Teorema 11.5.2 (Differenza Possibilista-Attualista):

$\forall^A x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall^A x P(x)$ è valido

ma

$\forall^P x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall^P x P(x)$ può fallire (dove $\forall^P$ è il quantificatore possibilista standard)

La teoria dei mondi possibili di Kripke ha fornito una fondazione matematica rigorosa per la logica modale, con ramificazioni profonde in filosofia, informatica, linguistica e matematica. I principali risultati includono:

1. Completezza: Dimostrazione che i sistemi assiomatici standard sono completi rispetto alle semantiche dei frame con proprietà appropriate
2. Decidibilità: Algoritmi effettivi per determinare la validità in molti sistemi modali

3. Teoria della Corrispondenza: Corrispondenze precise tra proprietà strutturali e formule modali
4. Estensioni: Generalizzazioni a logiche del primo ordine, temporali, epistemiche, deontiche